수열의 극한과 급수 기본편

도곡동 막샘의 수학 참고 | 수열의 극한 · 무한급수 · 무한등비급수 개념과 계산 완전 정리

📘 이 책을 보는 법

- 이 책은 미적분의 **극한 파트 개념을 한 권에 담은 기본서**이다. 정의·성질·대표 예제 중심으로 개념의 뿌리를 먼저 다진다.
- 본문 진행: **수열의 극한** → **무한급수** → **무한등비급수** 순서로 이어진다. 함수의 극한과 6대 기본 극한공식은 **다음 권**에서 다룬다.
- 평가원 기출은 **개념을 확인하는 도구**로 사용했다.
- 박스 색상: 회색=공식·정의, 노랑=예제, 분홍=실수 경고, 연초록=함정 체크, 연파랑=풀이 전략, 민트=공식 유도, 연민트=치트시트.
- 먼저 **도입부(표기 약속·용어·선수학습)**부터 읽고, 본문 단원을 순서대로 따라가라. 심화형은 별도 「극한 심화편」에서 다룬다.

0.1 이 책의 표기 약속

로그 표기 규칙

- 이 책의 본문에서는 **자연로그를 항상** $\ln$으로 통일한다 (밑 e).
- 상용로그(밑 10)는 $\log$, 밑 a인 로그는 $\log_a$로 표기한다.
- 평가원 원문을 인용할 때는 원문 표기를 그대로 유지하고, 필요한 경우 주석으로 뜻을 명시한다.

극한 기호 표기

- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$와 같이 **아래첨자는 항상 기호 바로 아래**에 표시한다.
- 수열 극한은 $n \to \infty$, 함수 극한은 $x \to a$ 또는 $x \to \pm\infty$로 구분한다.

0.2 용어 통일표

이 책의 용어	같이 쓰이는 다른 표현	의미
일반항 a_n	수열의 항, 제 n항	수열 $\{a_n\}$의 n번째 항을 변수 n으로 표현한 식
부분합 S_n	제 n항까지의 합	첫째항부터 제 n항까지 더한 합
수렴	한 점에 가까워짐	n이 커질수록 a_n이 한 값 α에 점점 가까워지는 것
발산	수렴하지 않음	수렴하지 않는 경우. 양의 무한대·음의 무한대·진동 3가지
첫째항 a	초항	수열의 첫 번째 항 a_1
공비 r	비율	등비수열에서 이웃한 항의 비 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
공차 d	차이	등차수열에서 이웃한 항의 차 $a_{n+1} - a_n$
이웃 항 소거	부분분수 분해 활용	부분분수로 쪼갠 뒤 앞뒤 항이 서로 상쇄되는 계산법
부정형	불확정 형태	$\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty$ 등
조임정리	샌드위치 정리	$a_n \le c_n \le b_n$의 양 끝이 같은 값으로 수렴하면 가운데도 수렴
수열 표기	$\{a_n\}$, 일반항 a_n	예: $a_n = \dfrac{1}{n}$이면 $a_1 = 1,\ a_2 = \dfrac{1}{2}, \ \cdots$
부분합 S_n	$S_n = a_1 + \cdots + a_n$	예: $a_n = \dfrac{1}{n}$이면 $S_3 = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{6}$
급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	무한급수	부분합 S_n의 극한값으로 정의. 수렴하면 그 값을 합이라 한다.

0.3 선수학습 체크 — 극한 단원 시작 전 반드시 아는 것

극한은 수학I의 지수·로그·삼각과 등비수열의 토대 위에 세워진다. 아래 내용이 손에 붙어 있지 않으면 본문에 들어가기 전에 10분만 다시 복습하라. **이 페이지에서 막히면 본문을 억지로 읽지 말고 수학I을 먼저 복습하는 게 결과적으로 더 빠르다.**

① 지수법칙

- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^0 = 1\ (a \neq 0)$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

② 로그법칙

- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^n = n \log_a x$
- $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (밑 변환)
- $a^{\log_a x} = x$, $\log_a a^x = x$

③ 삼각비·라디안

- $180^\circ = \pi$ rad, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}$ rad
- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- 반각 공식: $1 - \cos\theta = 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ (극한 유도 핵심)

※ 삼각함수 덧셈정리·합성은 미분편에서 본격 사용. 여기서는 위 4가지만 사용.

④ 등비수열의 기본식

- 첫째항 a, 공비 r일 때 일반항 $a_n = ar^{n-1}$
- 부분합 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r \neq 1)$
- $r = 1$이면 $S_n = na$

⑤ 등차·등비수열의 일반항

- 등차: $a_n = a + (n-1)d$ (d는 공차)
- 등비: $a_n = ar^{n-1}$ (r은 공비)

⚠ 자주 하는 선수학습 실수

- $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$와 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$는 같지만, **극한 공식은 라디안 기준**이다.
- $\log_a b \neq (\log a)/(\log b)$. 올바른 밑 변환은 $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ (분모·분자 같은 밑 c).
- $a^{m/n}$에서 n이 분모. $\sqrt[n]{a^m}$이지 $\sqrt[m]{a^n}$이 아니다.
- 등비수열 합 공식은 $r \neq 1$일 때만 성립. $r = 1$이면 별도 처리.

I. 수열의 극한

이제부터 "n이 커질 때 수열의 값이 어디로 가는가"를 본격적으로 다룬다. 수열의 극한은 무한급수, 미분의 정의, 적분의 정의 등 미적분 전체의 기반이 되는 개념이다.

#1 수열의 수렴과 발산

수렴의 정의

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 실수 α에 한없이 가까워지면, 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 하고 α를 $\{a_n\}$의 **극한값**이라 한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \quad \text{또는} \quad n \to \infty\text{일 때 } a_n \to \alpha$$

발산의 3가지 유형

- **양의 무한대로 발산**: $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ (예: $a_n = n^2$)
- **음의 무한대로 발산**: $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ (예: $a_n = -n$)
- **진동**: 값이 한 곳으로 모이지 않고 왔다 갔다 함 (예: $a_n = (-1)^n$)

※ "발산"은 "수렴하지 않는다"와 같은 말. ∞로 가든 진동하든 모두 발산으로 분류한다.

#2 수열의 극한값 — 기본 성질

극한값의 유일성

수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 **극한값은 오직 하나**이다. 즉, 같은 수열이 서로 다른 두 값 α, α'에 동시에 수렴할 수는 없다.

수렴하는 수열끼리 성립하는 4가지 연산 성질

둘 다 수렴한다는 조건에서만 다음 네 가지가 성립한다: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때

- $\lim_{n\to\infty} (ka_n) = k\alpha$ (단 k는 상수)
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \alpha\beta$
- $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0,\ \beta \neq 0$)

※ **두 수열이 모두 수렴**해야 쓸 수 있다. 한쪽이라도 발산하면 분리 계산 불가. 특히 $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$는 따로 변형해야 한다.

간단 예시

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1+0=1$$

연산 성질을 그대로 쓸 수 있는 경우: 분수를 덧셈으로 분리 → 각각 수렴 → 극한값 더하기.

⚠ 학생들이 자주 놓치는 것 — 수렴·발산 조합의 결론

- **한쪽 수렴 + 한쪽 발산 = 합은 반드시 발산**. 예: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+n\right)=\infty$. 수렴하는 $\frac{1}{n}$은 발산을 "되돌리지" 못한다.
- **발산 + 발산은 결과를 단정할 수 없다**. $\infty-\infty$, $\infty+\infty$는 경우별로 다르다. $\infty-\infty$는 부정형.
- **역이용 기법**: $\lim a_n=\alpha$, $\lim(a_n+b_n)=\gamma$를 알면 $\lim b_n=\gamma-\alpha$. 기출에서 조건으로 주어진 극한들로 **다른 극한을 추출**하는 핵심 기법.
- **"수렴한다"라는 조건만 주어지면 값은 모름**. 조건이 "$\lim a_n$이 존재한다"일 때와 "$\lim a_n=k$이다"일 때를 구분하라. 전자는 α로 두고 다른 식에 대입해 결정.

부정형 — 함부로 분리하면 안 되는 경우

다음 경우는 **그대로 대입하면 오답**. 별도 변형이 필요하다.

부정형	예시	처리 방향
$\frac{\infty}{\infty}$	$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{2n^2-n}$	최고차항으로 나눔 (#4)
$\infty-\infty$	$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$	유리화 또는 공통인수 묶기 (#5)
$0\cdot\infty$	$\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n^2}$	분수로 바꿔 환원
$\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$	기본 극한공식 또는 인수분해 (다음 권 「함수의 극한」에서 다룸)

※ $\frac{\infty}{\infty}$와 $\infty-\infty$는 다음 두 단원(#4, #5)에서 본격적으로 다룬다.

#3 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ — 점화식 극한의 핵심 원리

부분수열의 극한

수열 $\{a_n\}$이 α에 수렴하면, 항을 한 칸 이상 건너뛴 수열도 같은 값 α로 수렴한다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \implies \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \alpha,\ \lim_{n\to\infty} a_{n+k} = \alpha \ \ (k \in \mathbb{Z})$$

수렴한다는 것은 n이 커질수록 값이 α에 붙는다는 뜻이므로, $n+1,\ n+2,\ n+k$를 대입해도 같은 극한값이 나온다.

직관 예시: $a_n = \dfrac{1}{n}$이면 $a_{2n} = \dfrac{1}{2n},\ a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$도 모두 0으로 간다.

왜 중요한가 — 점화식 극한을 푸는 열쇠

수열이 점화식 $a_{n+1} = f(a_n)$으로 정의되고 **수렴한다는 조건**이 주어지면, 이 원리를 써서 극한값을 구할 수 있다.

양변에 $n \to \infty$를 취하면, 좌변은 $\lim a_{n+1} = \alpha$, 우변은 $\lim f(a_n) = f(\alpha)$가 되어

$$\alpha = f(\alpha)$$

라는 방정식이 만들어진다. 이를 풀면 극한값 α를 얻는다.

예제 — 점화식 극한

수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + 3$으로 정의되고 수렴한다. $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

1. 수렴한다고 했으므로 $\lim a_n,\ \lim a_{n+1}$의 극한을 **같은** α로 둘 수 있다.
2. 점화식 양변에 $n \to \infty$: $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 3$.
3. $\dfrac{1}{2}\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 6$.

⚠ 점화식 극한에서 놓치기 쉬운 포인트

- **수렴한다는 조건이 반드시 필요**. 점화식만 있고 수렴 여부를 모르면 $\alpha = f(\alpha)$ 방정식은 쓸 수 없다.
  예: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_1 = 1$이면 a_n이 무한대로 발산. $\alpha = 2\alpha + 1$을 풀어 $\alpha = -1$이 나오지만 **실제 극한이 아님**.
- **$\alpha = f(\alpha)$ 방정식의 해가 여러 개**일 수 있다. 예: $a_{n+1} = a_n^2$의 경우 $\alpha = \alpha^2$은 $\alpha = 0$과 $\alpha = 1$ 두 개의 해. 실제 극한값은 초기값 a_1에 따라 결정되므로 추가 조건(초기값·단조성·부호)으로 선별해야 함.
- **$a_{n+1} = f(a_n)$이 아닌 $a_{n+1} = f(n, a_n)$ 꼴이면 주의**. 예: $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$은 "$\alpha = \alpha + 0$"이 되어 항등식만 나옴. 이 경우 다른 기법(부분합·시그마) 필요.
- **$\lim a_n = \lim a_{n+k}$는 어떤 정수 k에 대해서도 성립**. 점화식이 a_{n+2}까지 올라가는 경우에도 동일한 α 대입 가능.

#4 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴 — 최고차항으로 나누기

▶ 풀이 전략

분모·분자 모두 ∞로 가는 분수식은 그대로 대입하면 부정형이다. 분모와 분자의 차수를 비교하기 위해, 보통 **분모의 최고차항으로 분자·분모를 나눈다**.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 5n}{2n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{5}{n}}{2 - \frac{1}{n^2}} = \frac{3+0}{2-0} = \frac{3}{2}$$

📌 차수 비교 — 바로 판정 가능

- (분자 차수) > (분모 차수) → $\pm\infty$ 발산
- (분자 차수) = (분모 차수) → 최고차항 계수의 비로 수렴
- (분자 차수) < (분모 차수) → 0으로 수렴

※ 실제 계산을 하지 않아도 차수만 보면 결과를 바로 예측할 수 있다. 시간 절약용 핵심 도구.

예제 1

$\lim_{n\to\infty} \frac{5n^2 + 3n}{n^2 - 2}$의 값은?

1 분자·분모 n^2으로 나눔: $\frac{5 + \frac{3}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \to \frac{5}{1} = 5$.

예제 2 2022 수능 23

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$의 값은? [2점]

1 분자·분모에 n을 곱함: 분자 $= 5+\dfrac{3}{n}$, 분모 $= 1-\dfrac{2}{n^2}$.

2 $\lim = \dfrac{5+0}{1-0} = 5.$

⚠ $\dfrac{\infty}{\infty}$에서 학생들이 놓치는 포인트

- **진짜 ∞로 가는지 먼저 확인**. 최고차항의 계수 부호까지 체크. 계수가 음수면 $-\infty$로 가므로 결과 부호에 주의.
- **근호 안의 차수 계산 주의**: $\sqrt{n^2+n}$의 차수는 2가 아니라 $\mathbf{1}$이다. 근호 안의 최고차가 n^2이면 제곱근을 씌워 n, 즉 차수 1.
  따라서 $\sqrt{n^2+n}-n$ 같은 식에서 "차수 2와 차수 1이 맞붙었다"고 착각하면 안 된다. **둘 다 차수** 1이어서 $\infty-\infty$ 부정형이 된다.
- **큰 수 지수 규칙**: n^a끼리 비교할 때 a가 큰 쪽이 빨리 커짐. $\ln n \ll n^{0.01} \ll n \ll n^2 \ll e^n$ 순서. 본격 등장은 함수 극한 단원.

#5 $\infty - \infty$ 꼴 — 유리화 또는 공통인수 묶기

▶ 풀이 전략

제곱근이 있으면 유리화 (켤레식 곱):

$$\sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$$

이 변형으로 $\infty - \infty$가 $\dfrac{\text{다항식}}{\text{제곱근 합}}$ 꼴이 되어 **최고차항 나누기**로 환원된다.

제곱근이 없으면 공통인수 묶기:

$$n^3 - 5n^2 = n^3\left(1 - \frac{5}{n}\right) \to \infty \cdot 1 = \infty$$

예제 2024 6월 23

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + 9n} - \sqrt{n^2 + 4n}\right)$의 값은? [2점]

1. 유리화: $\dfrac{(n^2 + 9n) - (n^2 + 4n)}{\sqrt{n^2 + 9n} + \sqrt{n^2 + 4n}} = \dfrac{5n}{\sqrt{n^2 + 9n} + \sqrt{n^2 + 4n}}$.
2. 분자·분모를 n으로 나눔: $\dfrac{5}{\sqrt{1 + \dfrac{9}{n}} + \sqrt{1 + \dfrac{4}{n}}} \to \dfrac{5}{1 + 1} = \dfrac{5}{2}$.

⚠ 유리화는 "두 항이 거의 같은 크기로 커질 때"만 의미 있다

제곱근이 있다고 **무조건 유리화하는 것이 아니다**. 유리화는 두 항이 **같은 차수·같은 계수로 커지면서 그 차이가 유한하게 남는** 구조일 때만 쓸 가치가 있다. 구조부터 먼저 판정하라.

식	구조	처리
$\sqrt{n^2+n}-n$	두 항 모두 차수 1, 계수 같음 → 유한 차이	**유리화** (값: $\frac{1}{2}$)
$\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}$	두 항 모두 차수 1, 계수 같음	**유리화** (값: $\frac{5}{2}$)
$\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}$	두 항 모두 차수 1, 계수 같음	**유리화** (값: 0)
$\sqrt{n^3+n}-n$	차수 $\frac{3}{2}$ vs 차수 1 → 앞이 압도	**유리화 무의미**. 그냥 ∞로 발산
$\sqrt{4n^2+1}-n$	차수 같지만 계수 다름 (2 vs 1)	**유리화 무의미**. $2n-n=n\to\infty$로 발산

판정 요령: 유리화 전에 **"두 항이 같은 상한으로 가는가"**부터 확인. 같은 차수·같은 계수면 유리화, 아니면 큰 쪽이 작은 쪽을 압도해서 발산.

#6 조임정리 (샌드위치 정리)

조임정리

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$이면

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$$

※ 부등식 양 끝이 같은 값으로 수렴하면, 사이에 낀 수열도 같은 값으로 수렴함이 강제된다.

⚠ 항상 두 경계가 같은 값으로 가야 한다. 한쪽만 알면 조임정리를 쓸 수 없다.

▶ 풀이 전략

1. 주어진 부등식의 **양변을 같은 꼴로 변형**한다 (예: 같은 식으로 나눔).
2. 양 끝(좌·우)의 극한을 각각 계산.
3. 두 극한이 같으면 가운데 수열도 그 값으로 수렴.

예제 2026 수능 25

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은? [3점]

1. 부등식 전체를 $n(>0)$으로 나눔: $\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{5n+1}{n}$.
2. 좌변: $\sqrt{9-\frac{5}{n^2}}+2 \to 3+2=5$.
3. 우변: $5+\frac{1}{n} \to 5$.
4. 조임정리에 의해 $\lim \frac{a_n}{n} = 5$.

⚠ 조임정리에서 학생들이 놓치는 디테일

- **부등호 $<$와 $\le$는 결론에 영향 없다.** 두 부등호 모두 α로 수렴하면 가운데도 α. $<$이든 $\le$이든 극한값에는 차이가 없다.
- **부등식이 "유한 개 예외"를 허용한다.** "모든 자연수 n"이 아니라 "충분히 큰 n부터"여도 조임정리 성립. 극한은 "결국 어디로 가는가"를 묻기 때문.
- **두 끝의 극한이 다르면 결론 불가.** $\lim a_n = 3,\ \lim b_n = 5$라면 가운데 c_n은 3과 5 사이 어떤 값이든 가능해서 특정 못함.
- **한쪽만 극한을 알면 쓸 수 없다.** $a_n \le c_n$만 있고 b_n 없으면 c_n이 α 이상이라는 것만 알 뿐 극한 특정 불가.
- **등호 경우만 있어도 쓸 수 있다.** $a_n = b_n$이 되어 c_n도 그 값과 같아지는 것. 이건 극한 연산 기본 성질과 다를 바 없음.

#7 등비수열 $\{r^n\}$의 극한 — 경우 분류

수열의 극한에서 가장 자주 쓰는 특수형이 등비수열이다. 공비 r의 값에 따라 수렴과 발산이 완전히 갈리므로 반드시 범위를 분류해서 다뤄야 한다.

r의 범위별 $\lim_{n\to\infty} r^n$

r의 범위	극한	양상
$r>1$	∞	발산 (무한히 커짐)
$r=1$	1	수렴 (모든 항이 1)
$-1<r<1$	0	수렴 (가장 많이 쓰임)
$r=-1$	없음	진동 (값이 $1, -1, 1, -1, \ldots$ 왕복, 유한한 값 사이)
$r<-1$	없음	진동 (절댓값이 무한히 커지며 부호 교대)

※ r^n은 "r을 계속 곱한 것"이므로 $|r|$**이 1보다 작은지, 같은지, 큰지**가 수렴·발산을 결정한다. 발산 구간은 양상이 다르므로 **$r=-1$과 $r<-1$을 반드시 분리**해서 다뤄야 문제 풀이에서 오류가 없다.

※ $\{ar^{n-1}\}$의 극한은 $a=0$이면 0, 아니면 r에 따라 위 표대로.

▶ 두 개 이상의 등비가 섞인 분수식

가장 빨리 커지거나, 가장 천천히 0으로 가는 등비를 기준으로 분모·분자를 나눈다.

- $n\to\infty$에서 3^n이 2^n보다 **훨씬 빨리 커지므로** 3^n과 2^n이 섞이면 3^n으로 나눈다.
- $\left(\frac{1}{2}\right)^n$과 $\left(\frac{1}{3}\right)^n$은 모두 0으로 가지만 $\left(\frac{1}{2}\right)^n$이 **더 천천히** 0으로 가므로 이것으로 나눈다.

예제 2026 6월 23

$\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 3^{n+1}}{2^n+3^n}$의 값은? [2점]

1. 분자 $=12\cdot 3^n$. 분자·분모를 3^n으로 나눔.
2. $\dfrac{12}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \to \dfrac{12}{0+1}=12.$

⚠ 미지수 r이 있을 때는 반드시 5경우 분류

r의 범위에 따라 극한 계산 방식이 달라진다. **$r=-1$과 $r<-1$을 반드시 분리**해야 한다.

[예시 1] $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{2n}}{1+r^{2n}}$ (분모·지수에 **짝수승 $2n$** 사용 — 분모가 0이 되는 문제 원천 차단)

r의 범위	극한값	처리
$\lvert r\rvert<1$	$\frac{0}{1+0}=0$	$r^{2n}\to 0$ 이용
$r=1$	$\frac{1}{2}$	$r^{2n}=1$ 대입
$r=-1$	$\frac{1}{2}$	$r^{2n}=1$ (짝수승이라 항상 1) → $r=1$과 동일
$\lvert r\rvert>1$ ($r>1$ 또는 $r<-1$)	1	분모·분자를 r^{2n}으로 나눔 → $\frac{1}{\frac{1}{r^{2n}}+1}\to 1$

※ 지수가 짝수$(2n)$이므로 $r<0$이어도 $r^{2n}>0$이 되어 분모가 0이 될 위험이 없다. 이게 **$r=1$과 $r=-1$을 한꺼번에 처리**할 수 있는 이유.

[예시 2] $\lim_{n\to\infty} \frac{r^{n}}{1+r^{n}}$ (지수가 **그냥 n**일 때 — r의 부호 주의)

r의 범위	극한값	처리
$-1<r<1$	0	$r^n\to 0$ 이용
$r=1$	$\frac{1}{2}$	$r^n=1$ 대입
$r>1$	1	분모·분자를 r^n으로 나눔
$r=-1$	**진동(발산)**	n 홀수면 분모 0, 짝수면 $\frac{1}{2}$ — 일관된 극한값 없음
$r<-1$	1	분모·분자를 r^n으로 나눔 → $\frac{1}{\frac{1}{r^n}+1}\to 1$

⚠ **출제자의 기본 설계**: 실전 기출에서는 학생이 $r=-1$에서 분모 0이 되는 상황에 빠지지 않도록 **분모의 지수를 $2n, 2n-2$ 같은 짝수승으로 설계**하는 경우가 많다. 문제를 볼 때 먼저 **지수의 짝·홀**을 확인해 분모 0 위험 구간이 있는지 점검하라.

⚠ "진동 발산"도 두 종류가 있다

- **$r=-1$형 진동**: 값이 $1,-1,1,-1,\ldots$처럼 **유한한 두 값을 왕복**. 절댓값은 일정하고, 홀수 번째 항과 짝수 번째 항이 각각 다른 값에 가까워진다 ($a_{2n}\to 1$, $a_{2n-1}\to -1$).
- **$r<-1$형 진동**: 값의 **절댓값이 무한히 커지며 부호가 교대**. r^n이 $(-2)^n$이면 $-2,4,-8,16,\ldots$처럼 발산. 부분수열도 각각 $\pm\infty$로 발산.

겉보기엔 둘 다 "수렴 안 함"이지만, **r^{2n}이나 $\lvert r^n\rvert$ 같은 부분수열의 극한**이 다르므로 복합 문제에서 구분이 필요하다. 예: $\{r^{2n}\}$은 $r=-1$일 땐 1로 수렴하지만 $r<-1$일 땐 무한대로 발산.

⚠ 등비수열에서 학생들이 놓치는 숨은 조건

- **$\{r^n\}$과 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건은 다르다.**
  $\{r^n\}$의 수렴 범위: $-1 < r \le 1$ ($r = 1$에서 1로 수렴, $|r| < 1$에서 0으로 수렴).
  $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 범위: $a = 0$이거나 $-1 < r \le 1$. **$a = 0$이면 모든 항이 0이므로 r 무관하게 수렴.**
- **"등비수열이 수렴한다"는 조건이 주어지면 $a = 0$ 경우를 반드시 확인.** 문제가 $\{ar^{n-1}\}$이 수렴한다 했으면 가능한 경우는 두 가지:
  ① $a = 0$ (모든 항 0, 수렴값 0)
  ② $a \neq 0$이고 $-1 < r \le 1$
- **수열 $\{r^n\}$의 수렴 범위 $-1 < r \le 1$**와 **급수 $\sum ar^{n-1}$의 수렴 범위 $-1 < r < 1$**는 $r = 1$ 포함 여부에서 다름. 급수는 $r = 1$ 제외.
- **발산 구간을 "$r \le -1$"로 묶어서 쓰면 위험.** $r = -1$과 $r < -1$은 발산의 양상이 다르고 ($r = -1$은 일정한 값 사이에서 진동, $r < -1$은 절댓값 발산), 분수식에서 $r = -1$이 분모 0을 만드는 경우도 있다. **항상 분리해서 다루는 습관**을 들여라.

▶ 수열의 극한 — 단원 함정 체크 (핵심 5)

1. 기본 성질(4가지 연산)은 **수렴하는 수열끼리만** 성립. 발산하는 것을 포함하면 분리 계산 불가.
2. 부정형은 바로 대입하면 안 됨. $\frac{\infty}{\infty}$는 최고차항 나누기, $\infty - \infty$는 **두 항이 같은 차수·같은 계수일 때만** 유리화가 의미 있음.
3. 조임정리는 **양쪽 경계가 같은 값**으로 수렴해야 한다. 한쪽만 알면 쓸 수 없다.
4. 등비수열 극한은 반드시 **r의 범위별 5경우 분류**. 특히 $r = -1$과 $r < -1$을 분리해서 다뤄야 문제에서 오류가 없다.
5. 점화식 극한은 **수렴한다는 조건**이 있어야 $\alpha = f(\alpha)$ 방정식을 쓸 수 있다.

📋 수열의 극한 치트시트

- **연산 성질**: $\lim(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$, $\lim(a_n b_n) = \alpha\beta$, $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ — 수렴 전제
- $\frac{\infty}{\infty}$: 분모의 최고차항으로 나누기. 차수 비교로 바로 판정
- $\infty - \infty$ **(제곱근)**: 두 항이 같은 차수·같은 계수일 때만 유리화 의미. $\frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}$
- **조임정리**: 양끝이 같은 값 → 가운데도 같은 값
- **등비 $\{r^n\}$ (5경우)**: $r > 1$ 발산, $r = 1$ 수렴(1), $|r| < 1$ 수렴(0), $r = -1$ 유한 진동, $r < -1$ 절댓값 발산
- **두 등비 혼합**: 빨리 커지는 쪽(또는 천천히 0으로 가는 쪽) 기준으로 나누기
- **점화식 극한**: $\lim a_n = \lim a_{n+1} = \alpha$ (수렴 조건 하에) → $\alpha = f(\alpha)$ 방정식

⚠ **핵심 전제**: 위 모든 기법은 **"수렴"한다는 조건**에서만 성립. 특히 점화식 극한에서 학생들이 사고를 가장 많이 낸다.

II. 무한급수

수열의 극한을 배웠으니, 이제 수열의 항을 **무한히 더한 것**이 어떤 값에 수렴하는지를 다룬다. 무한급수는 무한등비급수의 기반이 되는 개념이다.

#8 무한급수의 정의와 부분합

무한급수의 정의

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 더한 식 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$를 **무한급수**라 한다.

첫째항부터 제 n항까지의 합 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$을 **부분합**이라 하고, 부분합의 수열 $\{S_n\}$이 수렴하면 그 극한값을 무한급수의 **합**이라 한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$

※ 무한급수의 합은 "무한 개를 직접 더한 결과"가 아니라 **부분합의 극한**으로 정의된다. 이 구분이 핵심이다.

무한급수의 수렴과 발산

- **수렴**: $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ (유한한 값)이면 급수 $\sum a_n$은 S에 수렴한다.
- **발산**: $\lim_{n\to\infty} S_n$이 존재하지 않으면(무한대로 가거나 진동) 급수는 발산한다.

예제 — 부분합으로 급수의 합 구하기

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$의 합을 구하여라.

1. 부분분수 분해: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
2. 부분합: $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.
3. $\lim_{n\to\infty} S_n = 1 - 0 = 1$. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

※ 이웃 항이 소거되어 첫째와 마지막만 남는 구조를 **이웃 항 소거(부분분수 활용)**라 한다.

#9 수렴의 필요조건 — $a_n \to 0$

급수 수렴의 필요조건

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

대우: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum a_n$은 반드시 발산한다.

⚠ 역은 성립하지 않는다 — 조화급수 반례

"$a_n \to 0$이면 급수가 수렴한다"는 **거짓**이다. 대표 반례가 **조화급수**이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \infty \quad \text{(발산)}$$

$a_n = \frac{1}{n} \to 0$이지만 합은 무한히 커진다. 따라서 **$a_n \to 0$은 수렴의 필요조건이지 충분조건이 아니다**.

※ 시험에서 "$a_n \to 0$이므로 급수가 수렴한다"라고 쓰면 오답이다. 수렴 판정은 부분합의 극한 또는 별도 판정법(등비급수 등)으로 해야 한다.

#10 무한급수의 성질

수렴하는 급수끼리의 연산

$\sum a_n = \alpha$, $\sum b_n = \beta$일 때

- $\sum (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$
- $\sum c a_n = c\alpha$ (단, c는 상수)

※ 수열의 극한 성질과 마찬가지로 **두 급수가 모두 수렴**해야 쓸 수 있다. 한쪽이라도 발산하면 분리 불가.

⚠ 급수에서 학생들이 자주 하는 실수

- **$a_n \to 0$이면 수렴이라고 단정하는 것**. 위 조화급수 반례를 항상 떠올려라.
- **부분합 S_n과 일반항 a_n을 혼동하는 것**. 급수의 합은 $\lim S_n$이지 $\lim a_n$이 아니다.
- **$a_n = S_n - S_{n-1}$을 잊는 것**. S_n이 주어졌을 때 일반항을 추출하는 핵심 관계식이다 ($n \geq 2$). $a_1 = S_1$은 별도 확인.

▶ 무한급수 — 단원 함정 체크 (핵심 3)

1. 급수의 합 = **부분합의 극한**. "무한 개를 직접 더한 값"이 아니다.
2. $a_n \to 0$은 수렴의 **필요조건**일 뿐. 충분조건이 아니다 (조화급수).
3. 급수의 연산 성질은 **수렴하는 급수끼리만** 성립.

III. 무한등비급수

무한급수 중 가장 자주 다루는 특수한 형태가 등비급수이다. 공비의 범위에 따라 수렴·발산이 깔끔하게 갈리고, 도형 문제와 결합되어 평가원의 단골 출제 유형이 된다.

#11 무한등비급수의 수렴 조건과 공식

무한등비급수의 수렴과 합

첫째항 a, 공비 r인 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$는

- $|r| < 1$**일 때 수렴**하고, 합은 $\dfrac{a}{1-r}$
- $|r| \geq 1$**일 때 발산** (단, $a = 0$이면 합은 0)

※ 수열 $\{r^n\}$의 수렴 범위 $-1 < r \leq 1$과 달리, 급수는 $r = 1$**도 제외**한다. $r = 1$이면 모든 항이 a이므로 합이 ∞로 발산.

왜 $\dfrac{a}{1-r}$인가 — 부분합에서 유도

등비수열의 부분합 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ $(r \neq 1)$에서 $|r| < 1$이면 $r^n \to 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a(1-0)}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

※ 선수학습에서 배운 등비수열 부분합 공식이 여기서 그대로 쓰인다.

예제 1 — 숫자형 (단순 합 공식 적용)

$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$ 의 값을 구하여라.

1. 첫째항 $a = 3$, 공비 $r = \dfrac{2}{5}$. $|r| = \dfrac{2}{5} < 1$이므로 수렴.
2. $\sum = \dfrac{3}{1-\frac{2}{5}} = \dfrac{3}{\frac{3}{5}} = 5$.

예제 2 — 숫자형 (등비 판별 후 합)

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n}$의 값을 구하여라.

1. $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2^n} = \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$. 첫째항 $a = \dfrac{1}{2}$, 공비 $r = -\dfrac{1}{2}$.

2

$|r| = \frac{1}{2} < 1$이므로 수렴. $\sum = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}$.

#12 도형과 무한등비급수

도형에서 넓이나 길이의 규칙적 반복 구조를 찾아 무한등비급수로 합산하는 유형이다. 평가원에서 거의 매년 출제된다.

▶ 도형 + 무한등비급수 풀이 전략

1. **도형의 닮음·합동을 먼저 찾는다**: 반복 구조에서 닮음비 k를 파악하면 각 변의 길이가 자연스럽게 나온다. 넓이비는 k^2이므로 공비 $r = k^2$도 바로 결정된다.
2. **S_1 (또는 R_1)을 정확히 구한다**: 1단계에서 알아낸 길이를 이용하면 첫째항 계산이 훨씬 쉬워진다.
3. **무한등비급수 공식 적용**: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r}$.

예제 3 — 도형형 (넓이 반복)

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 안쪽에 작은 정삼각형을 만든다. 이 과정을 무한히 반복할 때, 안쪽에 새로 만들어지는 **모든 정삼각형의 넓이의 합**을 구하여라.

❶ 원래 정삼각형 넓이 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$. 중점 연결로 만든 안쪽 삼각형의 한 변 $= 2$, 넓이 $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$. 닮음비 $k = \dfrac{1}{2}$, 넓이비(공비) $r = \dfrac{1}{4}$.

❷ 첫째항 $S_1 = \sqrt{3}$ (첫 번째로 안쪽에 생긴 삼각형).

❸ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

⚠ 도형 무한등비급수에서 학생들이 놓치는 포인트

- **넓이비 = (닮음비)^2**. 길이가 k배이면 넓이는 k^2배. 이 관계를 쓰면 S_1만 정확히 구하면 된다.
- **색칠 영역의 범위를 정확히 해석**해야 한다. "삼각형 전체 넓이"인지 "도형 밖으로 나간 부분만"인지에 따라 S_1이 달라진다.
- **공비를 구할 때 도형 전체를 다시 그릴 필요 없다**. 닮음비만 알면 넓이비가 바로 나온다.