수학1 · 지수·로그 기본편

도곡동 막샘의 수학 창고

📕 **이 책의 구성**

지수·로그 단원의 계산 공식과 기본 풀이법을 출제 빈도순으로 정리했다.
거듭제곱근부터 로그방정식까지, 공식을 알면 바로 풀리는 유형을 다룬다.
함수 그래프·혼합 부등식·복합 조건은 심화편에서 다룬다.

📋 목차

§ 1. 거듭제곱과 거듭제곱근

1.1 거듭제곱

거듭제곱의 정의

실수 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고 a^n으로 나타낸다.

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{개}}$$

자연수 지수에서의 지수법칙

임의의 실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여

① $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

② $(a^m)^n = a^{mn}$

③ $(ab)^n = a^n b^n$

④ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$

💡 문제풀이 팁 — 공통인수로 묶기

$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

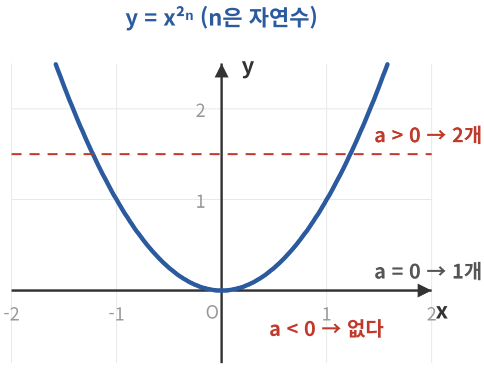
$\dfrac{a^m - a^n}{a^k} = a^{m-k} - a^{n-k}$ $(a \neq 0)$

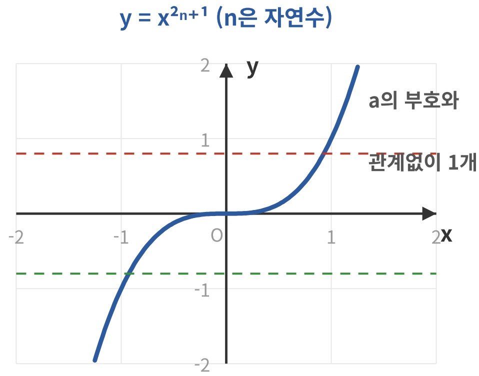
1.2 거듭제곱근의 정의

실수 a에 대하여 n이 2 이상의 자연수일 때, **n제곱하여 a가 되는 수**, 즉 방정식 $x^n = a$를 만족시키는 수 x를 a의 **n제곱근**이라 한다.

a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n이 홀수	1개 ($\sqrt[n]{a}$)	1개 (0)	1개 ($\sqrt[n]{a}$)
n이 짝수	2개 ($\pm\sqrt[n]{a}$)	1개 (0)	없다





거듭제곱근 기호

$a > 0$이고 n이 짝수일 때, a의 양의 n제곱근을 $\sqrt[n]{a}$로 나타낸다.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$n = 2$일 때는 $\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$로 쓴다.

1.3 거듭제곱근의 성질

성질 정리 ($a > 0, b > 0, m, n$은 2 이상의 자연수)

① $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

② $\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ($b \neq 0$)

③ $(\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

⚠ $(\sqrt[n]{a})^n$의 함정

n이 짝수일 때 $(\sqrt[n]{a})^n = |a|$이다. a가 **아니다**.

n이 홀수일 때는 $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

1.4 계산 요령

💡 **거듭제곱근은 전부 분수 지수로 바꿔서 계산**

$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$
$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$
등으로 통일하면 지수법칙만으로 끝난다.

예시

$\sqrt[3]{8} \times \sqrt[6]{4}$

$$= 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \times 2^{2 \cdot \frac{1}{6}} = 2^1 \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

❌ **이 개념에서 가장 많이 틀리는 3가지**

1. 짝수근에서 $|a|$를 빠뜨리고 그냥 a로 씀
2. 음수의 짝수 거듭제곱근이 실수에서 존재하지 않는다는 사실을 놓침
3. $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$ 같은 분수 지수 변환을 건너뜀

📌 **거듭제곱근이 보이면 무조건 분수 지수로 바꾼다. 짝수근이면 절댓값을 떠올린다.**

§ 2. 지수의 확장

2.1 0 또는 음의 정수인 지수

지수의 확장 — 정수

$a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때,

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

⚠ 0^0은 정의하지 않는다

2.2 유리수인 지수

지수의 확장 — 유리수

$a > 0$이고 m, n $(n \geq 2)$이 정수일 때,

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

특히 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

⚠ 지수가 분수(유리수)로 확장되는 순간, 밑은 반드시 양수

밑이 음수이면 모순이 발생한다. 예: $(-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = -2$이지만,
$(-8)^{\frac{2}{6}}$을 $((-8)^2)^{\frac{1}{6}} = 64^{\frac{1}{6}} = 2$로 계산하면 값이 달라진다.
따라서 유리수 지수에서는 **$a > 0$일 때만** 사용한다.

2.3 지수법칙 — 조건에 따른 구분

지수법칙의 적용 범위

지수 범위	밑 조건	법칙
자연수	임의의 실수 a, b	① ~ ⑤ 모두 성립
정수 (0, 음수 포함)	$a \neq 0, b \neq 0$	① ~ ⑤ 모두 성립
유리수	$a > 0, b > 0$	① ~ ⑤ 모두 성립
실수	$a > 0, b > 0$	① ~ ⑤ 모두 성립

지수가 확장될수록 밑 조건이 강해진다. 자연수 → 실수로 갈수록 $a > 0$이 필요해진다.

지수법칙 5가지 ($a > 0, b > 0$, x, y는 실수)

① $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
② $(a^x)^y = a^{xy}$
③ $(ab)^x = a^x b^x$
④ $a^x \div a^y = a^{x-y}$
⑤ $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

2.4 밑 통일

💡 밑을 같은 소수로 통일하면 지수끼리의 사칙연산만 남는다

4, 8, 16, 32 → 2의 거듭제곱
9, 27, 81 → 3의 거듭제곱

예시

$$\frac{27^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{3^2 \times 3^{-1}}{3^{\frac{1}{3}}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

📌 **밑이 다르면 먼저 밑 통일부터.**

§ 3. 로그의 뜻과 성질

3.1 로그의 정의

정의

$a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$일 때,

$$a^x = N \quad \Longleftrightarrow \quad x = \log_a N$$

$\log_a N$을 a**를 밑으로 하는** N**의 로그**라 한다.
N을 $\log_a N$의 **진수**라 한다.

3.2 바로 쓰는 로그 값 · 역성질

⭐ 즉시값 — 계산·방정식·그래프를 잇는 연결고리

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1$$
$$a^{\log_a x} = x \ (x > 0), \qquad \log_a (a^x) = x$$

해석

$\log_a 1 = 0$: $a^0 = 1$이므로 성립
$\log_a a = 1$: $a^1 = a$이므로 성립
$a^{\log_a x} = x$: 로그와 지수는 서로 **역관계**
$\log_a (a^x) = x$: 지수형과 로그형은 서로 되돌릴 수 있다

🎯 시험장에서 바로 쓰는 순간

· 로그값 계산을 빠르게 끝낼 때
· 로그방정식을 지수형으로 바꾼 뒤 다시 원래 변수로 돌아올 때
· 지수함수와 로그함수의 관계를 볼 때

예시 — 즉시값 활용

$3^{\log_3 5} + \log_4 64 = ?$

$3^{\log_3 5} = 5$

$\log_4 64 = \log_4 4^3 = 3$
답: 8

📌 **a^x과 $\log_a x$가 같이 보이면 역함수 관계를 먼저 떠올린다.**

3.3 로그 연산법칙

3대 성질 ($a > 0$, $a \neq 1$, $M > 0$, $N > 0$)

① 곱 → 합: $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
② 몫 → 차: $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
③ 지수 → 계수: $\log_a M^k = k \log_a M$ (k는 실수)

⚠ 자주 하는 실수

$\log_a M + \log_a N = \log_a (MN)$은 맞지만,
$\log_a M \cdot \log_a N$에는 이 성질이 적용되지 않는다.

3.4 밑 변환 공식

밑 변환

$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

특히 $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$는 자주 쓰인다.

3.5 로그 성질의 활용

⭐ 활용 공식 — 밑·진수의 지수 처리

a, b가 1이 아닌 양수이고, m, n은 실수이며 $m \neq 0$일 때,

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$
$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

💡 밑이 다른 로그가 섞이면 하나의 밑으로 통일

보통 가장 작은 소수(2 또는 3)로 통일하면 정리가 깔끔하다.

예시

$\log_2 3 \times \log_3 8$

$$= \log_2 3 \times 3 \log_3 2 = 3 \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = 3$$

❌ 이 개념에서 가장 많이 틀리는 3가지

1. $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1$을 즉시 쓰지 못함
2. 곱의 로그와 로그의 곱을 혼동
3. 밑 변환 시 분자·분모를 뒤집어 씀

📌 로그 문제는 밑을 같게 만들어 풀어야 한다.

§ 4. 로그방정식

4.1 문제 첫 줄 분류표

⭐ **로그방정식은 먼저 형을 분류한다**

1형 $\log_a f(x) = c$
→ 지수형 $f(x) = a^c$로 바꾼다.

2형 $\log_a f(x) = \log_a g(x)$
→ $f(x) = g(x)$로 놓고, 마지막에 **진수 조건** $f(x) > 0, g(x) > 0$ 확인

3형 $(\log_a x)^2 + b\log_a x + c = 0$
→ $t = \log_a x$로 치환한 뒤 이차방정식 (t는 **모든 실수**)

4형 밑이나 진수에 변수가 함께 있는 형
→ 식을 풀기 전에 **정의 조건** $a > 0$, $a \neq 1$, 진수 > 0부터 정리

💡 **풀이 루틴 5단계**

① 형 분류
② 식 정리
③ 방정식 풀이
④ 진수 조건 확인
⑤ 밑 조건 확인

4.2 기본형 풀이

예시

$\log_2(3x - 1) = 3$

$$3x - 1 = 2^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

진수 확인: $3(3) - 1 = 8 > 0$ ✓

4.3 치환형

예시

$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$

$t = \log_2 x$로 치환:

$t^2 - 3t + 2 = 0 \to t = 1, 2$

$\to x = 2, 4$. 둘 다 $x > 0$ ✓

❌ 이 개념에서 가장 많이 틀리는 3가지

1. 진수 > 0 확인을 빠뜨림 → 거짓 해를 포함
2. 밑 조건 $(a > 0, a \neq 1)$을 잊음
3. 치환 후 역치환을 빠뜨려 답을 t 값으로 냄

📌 **로그방정식은 풀기 전에 형부터 본다. 풀고 끝이 아니라 진수 조건 확인까지가 풀이.**

§ 5. 상용로그

5.1 상용로그의 정의

상용로그

10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 밑 10을 생략하여 쓴다.

$$\log_{10} N = \log N$$

5.2 정수부분과 소수부분

상용로그 분해

$\log N = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)
n: 정수부분
α: 소수부분

5.3 자릿수

자릿수 공식

양의 정수 N의 자릿수 = $\lfloor \log N \rfloor + 1$

예시

2^{30}은 몇 자리 수? ($\log 2 = 0.3010$)

$\log 2^{30} = 30 \times 0.3010 = 9.030$
→ 정수부분 9 → **10자리**

5.4 상용로그 확장 — 소수점 이동과 과학적 표기

⭐ 과학적 표기와 상용로그

$N = a \times 10^k$ ($1 \le a < 10$)이면

$$\log N = \log a + k$$

k: 정수부분과 직접 연결
$\log a$: 소수부분과 연결

바로 쓰는 해석

10^m배 하면 로그값은 m만큼 커진다.

10^m분의 1이 되면 로그값은 m만큼 작아진다.

자릿수 문제, 소수점 위치 문제, 과학적 표기 문제가 한 번에 연결된다.

⚠ $0 < N < 1$일 때

$0 < N < 1$이면 $\log N < 0$이다.

이때도 정수부분과 소수부분으로 해석할 수 있어야 한다.

예시 해석

$$\log(3.2 \times 10^5) = \log 3.2 + 5$$
$$\log(4.7 \times 10^{-3}) = \log 4.7 - 3$$

📌 상용로그는 소수점 위치를 10의 거듭제곱으로 분리해서 본다.

§ 6. 로그 정의역과 정수 개수

6.1 정의역 조건

로그 존재 조건

$\log_a b$가 정의되려면:
① $a > 0$
② $a \neq 1$
③ $b > 0$

6.2 정의역 문제 4분류

⭐ 변수 위치에 따른 첫 행동

변수 위치	첫 행동
진수에만 변수	진수 > 0 부등식만 풀기
밑에만 변수	밑 $> 0, \neq 1$ 조건 세우기
밑과 진수 모두 변수	세 조건 동시 연립
정수 개수까지 물으면	구간 구한 후 **경계 포함/제외** 체크

예시

$\log_{(x-3)}(-x^2+10x-16)$이 정의되는 정수 x의 개수.

$x - 3 > 0 \to x > 3$
$x - 3 \neq 1 \to x \neq 4$
$-x^2 + 10x - 16 > 0 \to 2 < x < 8$

교집합: $3 < x < 8,\ x \neq 4$
→ 정수 5, 6, 7 → **3개**

❌ 이 개념에서 가장 많이 틀리는 3가지

1. 밑 조건을 잊고 진수만 확인
2. 밑과 진수에 변수가 모두 있는데 하나만 확인
3. 정수 개수에서 경계값 포함/제외를 실수

📌 정수 개수는 마지막 경계 포함 여부가 답을 바꾼다.

부록. 체크리스트

☐ 거듭제곱의 정의와 자연수 지수법칙을 바로 쓸 수 있는가?

☐ 거듭제곱근을 분수 지수로 바꿔 계산할 수 있는가?

☐ 짝수 제곱근에서 $|a|$를 빠뜨리지 않는가?

☐ 0^0이 정의되지 않음을 알고 있는가?

☐ 지수 범위(자연수/정수/유리수/실수)에 따른 밑 조건 차이를 아는가?

☐ $\log_a 1 = 0, \log_a a = 1, a^{\log_a x} = x$를 반사적으로 쓰는가?

☐ $\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$ 활용 공식을 아는가?

☐ 로그방정식 4형 분류를 즉시 판별하는가?

☐ 로그방정식 풀이 후 진수 > 0과 밑 조건을 확인하는가?

☐ 상용로그: $\log N = \log a + k$를 연결할 수 있는가?

☐ 로그 정의역: 세 조건의 교집합으로 구하는가?

기본편 → 심화편 연결 지도

⭐ **왜 계산형이 그래프·부등식·최대최소로 이어지는가**

기본편 (계산축)	→	심화편 (판단축)
거듭제곱·지수법칙	→	지수방정식 치환
로그 정의·연산법칙	→	로그함수 그래프·역함수
밑 변환·밑 통일	→	밑에 따른 부등호 방향·증가감소
정의역·정수 개수	→	매개변수 범위·복합 조건

기본편은 "값을 구하는 힘", 심화편은 "방향을 판단하는 힘"이다.
두 권은 별개의 책이 아니라, 한 단원을 단계적으로 올라가는 구조다.