확률과 통계 1학기 중간 범위 개념 총정리 · 기본편

도곡동 막샘의 수학 창고 | 수능 심화 유형은 별도 심화편 참조

★ 학생들이 가장 많이 틀리는 11가지 — 시험 직전 체크리스트

1. **원순열인데 $n!$을 쓰는 실수** → 반드시 $(n-1)!$. 정다각형·회전대칭 탁자는 회전 겹침 횟수로 나눈다.
2. **"A가 B보다 앞" 무조건 $\frac{1}{2}$ 곱하기 실수** → **A, B에 대한 조건이 똑같을 때만** 성립.
3. **원형 분리와 일렬 분리 혼동** → 일렬은 사이+양 끝 $(m+1)$자리, 원형은 사이 m자리.
4. **같은 크기 조 k개인데 $k!$로 안 나눔** → 조에 이름이 없으면 반드시 $k!$ 나눔.
5. **자연수 해인데 바로 ${}_nH_r$을 쓰는 실수** → 치환($x_i' = x_i - 1$) 후 적용.
6. **비복원인데 독립시행 공식을 쓰는 실수** → 매 시행 성공확률이 같아야 쓸 수 있다.
7. **"적어도 k"에서 k번부터 더하는 실수** → 여사건으로 $1 - P(0$부터 $k-1$까지$)$가 안전.
8. **배반 ≠ 독립** → $P(A), P(B) > 0$인 배반사건은 반드시 **종속**.
9. **조건부 확률인데 분모를 그대로 두는 실수** → "~일 때" 조건이 붙으면 **분모(표본공간)가 바뀐다**.
10. **이항계수 제 k항에서 $r = k$를 대입하는 실수** → 일반항은 제 $(r+1)$항이므로 $r = k - 1$.
11. **같은 종류와 서로 다른 물건 분배 혼동** → 서로 다른 물건은 중복순열·조 나누기, 같은 물건은 중복조합. 상자 종류와 짝지어 공식이 전혀 다르다.

00 문장 해석 사전 — 문장 해석이 절반이다

문장 표현	수학적 의미	적용 공식
임의로 뽑는다	각 원소가 같은 확률 → 수학적 확률 사용 가능	$P = n(A)/n(S)$
동시에 뽑는다	비복원으로 r개를 고르되 **선택된 원소의 집합만으로 사건이 결정**될 때, 순서대로 r번 뽑은 것과 확률값 동일 예) "동시에 2개를 뽑아 모두 짝수" = "순서대로 2번 뽑아 둘 다 짝수". 순서가 드러나는 사건(첫 번째가 짝수)엔 적용 X	${}_nC_r$
차례로 / 순서대로 뽑는다	순서가 있는 선택	${}_nP_r$ 또는 단계별 곱

다시 넣고 뽑는다 (복원)	매 시행 독립. 표본공간 유지	중복순열 n^r
다시 넣지 않고 뽑는다 (비복원)	매 시행 종속. 표본공간 감소	순차면 ${}_nP_r$, 동시면 ${}_nC_r$
남김없이 나눠준다	모두 분배 → 합이 전체	$x_1+\cdots+x_k=n$
적어도 k개 / **한 가지 이상**	k개 이상 → 여사건이 유리	$1-P(0\text{개}+\cdots+(k-1)\text{개})$
많아야 k개 / **최대** k개	k개 이하 → 직접 합산 또는 여사건	$P(0\text{번})+\cdots+P(k\text{번})$
정확히 k개	딱 k번. 독립시행이면 바로 공식 적용	${}_nC_kp^k(1-p)^{n-k}$
서로 다른 n개	각 원소가 구별됨	${}_nP_r$, ${}_nC_r$
같은 종류의 물건	물건 자체가 구별 불가 → **중복조합 / 분배**에 주로 연결	${}_nH_r$
구별하지 않는다 (나열)	나열에서 같은 것이 섞여 있을 때 → **같은 것이 있는 순열**	$\dfrac{n!}{p!q!\cdots}$
같은 것으로 본다 (회전)	회전하면 같아지는 배치 → 원순열	$(n-1)!$ 또는 추가 나눔
중복을 허용하여	같은 원소 여러 번 선택 가능	${}_n\Pi_r$, ${}_nH_r$
서로 이웃하지 않게	분리 조건 → 나머지 먼저 배열 후 사이에 삽입	사이 자리 수 확인 필수
순서를 생각하지 않고	조합	${}_nC_r$
A일 **때**, B가 일어났을 **때**	조건부 확률 → 분모가 바뀜	$P(B\|A)=P(A\cap B)/P(A)$
모두 / 전부	예외 없이 전체 대상에 조건 적용. 직접 계산이 자연스러울 수도 있음	직접 계산 or 여사건(적어도 하나가 아닌 경우)
나머지	전체에서 앞서 배분한 것을 제외한 양	합 조건식에서 나머지 계산

물건 분배 유형 한눈에 보기 (표에서 상자 수 = n, 물건 수 = r)

물건	상자	빈 상자	공식
서로 다른 물건	서로 다른 상자	허용	중복순열 n^r
같은 물건	서로 다른 상자	허용	중복조합 ${}_nH_r$
서로 다른 물건	서로 다른 상자	모든 상자에 적어도 1개	포함·배제 or 조 나누기 후 분배 (함수 문맥: 치역 = 공역)

※ 표의 모든 행에 공통으로 적용되는 전제:

① 각 물건은 정확히 한 상자에 들어간다 ② 상자는 서로 구별된다 ③ "빈 상자" 열의 허용/불허 조건을 따른다

※ "같은 크기의 조 k개로 나누기"는 분배가 아닌 **분할**이므로 **#6 조 나누기**에서 다룬다.

▶ 경우의 수 판단 플로우

문제를 보면 이 순서로 판단한다

① **원형 배열인가?** → YES: 원순열 ($(n-1)!$, 정다각형/회전대칭 탁자는 회전 겹침 횟수로 나눔)

② **이웃/분리 조건이 있는가?** → 이웃: 묶기, 분리: 나머지 먼저 배열 후 사이 삽입

③ **순서가 있는가?**

YES + 중복 없음 → 순열 ${}_nP_r$

YES + 중복 허용 → 중복순열 n^r

NO + 중복 없음 → 조합 ${}_nC_r$

NO + 중복 허용 → 중복조합 ${}_nH_r$

④ **같은 것이 섞여 있는가?** → 같은 것이 있는 순열 $\dfrac{n!}{p!q!\cdots}$

⑤ **조 나누기 / 분할 문제인가?** → 조에 이름이 있으면 그대로. 이름 없는 조인데 서로 바꿔도 같은 배열이 있으면, 그 중복 수만큼 나눈다 (같은 크기 조 k개 → $k!$로 나눔)

⑥ **함수의 개수 문제인가?** → 조건에 따라 n^m / ${}_nP_m$ / ${}_nC_m$ / ${}_nH_m$

⑦ **방정식 정수해 문제인가?** → 중복조합 변환 (조건에 따라 치환). 여사건 · **포함·배제** · 경우분류로 연결됨

▶ **4대 기본 유형 한눈에 비교**

유형	순서	중복	공식	대표 예시
순열	O	X	${}_nP_r$	n명 중 r명 뽑아 줄 세우기
조합	X	X	${}_nC_r$	n명 중 r명 대표 뽑기
중복순열	O	O	n^r	r자리 암호, 복원 추출 나열
중복조합	X	O	${}_nH_r$	같은 종류 공 r개를 n통에 분배

01 경우의 수

1. 순열

#1 합의 법칙 · 곱의 법칙

> **합의 법칙**: 두 경우 A, B가 **서로 겹치지 않을 때**, A 또는 B가 일어나는 경우의 수 $= m + n$
>
> ※ 확률 단원에서 이 조건을 **배반사건**이라 부른다.
>
> **곱의 법칙**: A가 m가지, 그 각각에 대해 B가 n가지이면 동시에 일어나는 경우의 수 $= m \times n$

#2 순열

서로 다른 n개에서 r개를 택해 **순서 있게** 나열하는 경우의 수

$$ {}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad {}_nP_n = n!, \quad 0! = 1 $$

조건이 있는 순열 전략

이웃 조건 (일렬): 이웃해야 하는 대상 k개를 하나로 묶어 전체 $(n-k+1)$개를 배열 → 묶음 내부 $k!$ 곱하기

→ $(n-k+1)! \times k!$

분리 조건 (일렬): 이웃하지 않아야 하는 대상 k개를 제외한 나머지 $(n-k)$개를 먼저 배열 → 생긴 사이+양 끝 자리 $(n-k+1)$개 중 k개를 택해 배치

→ $(n-k)! \times {}_{n-k+1}P_k$

특정 자리 고정: 조건 대상을 먼저 배치 → 나머지를 배열

순서가 정해진 배열: "A가 B보다 앞에" → A와 B를 같은 문자 X로 보고 나열 후, 나중에 A, B 순서대로 집어넣는다

이웃 예시 7명 중 A, B, C 3명이 이웃하여 한 줄로 서기:

{A,B,C}를 묶어 5덩어리 배열 → $5!$, 내부 배열 → $3!$ $\therefore 5! \times 3! = 720$

분리 예시 7명 중 A, B 2명이 이웃하지 않게 한 줄로 서기:

나머지 5명 배열 → $5!$, 사이+양 끝 = 6자리 중 2자리 선택·배치 → ${}_6P_2$ $\therefore 5! \times {}_6P_2 = 3600$

⚠ 실수 경고

· 이웃 → 묶어서 배열. 묶기 전 자리에 바로 $n!$ 하면 틀린다.

· 분리 → 사이+양 끝 자리 수를 먼저 세야 한다. 삽입 후 자리가 늘어남을 잊지 말 것.

· "A가 B보다 앞" 조건: **A, B에 대한 조건이 똑같을 때만** 전체의 $\frac{1}{2}$을 곱할 수 있다. A, B에 다른 조건이 붙으면 직접 세야 한다.

출제 예시 1, 2, 3, 4, 5를 나열할 때 1이 2보다 앞에 오는 경우의 수: $\frac{5!}{2} = 60$

#3 원순열 — 유형별 총정리

배열 유형	공식	조건 / 이유
원형 탁자 (n명)	$(n-1)!$	회전하면 같아지는 배치 → 1명 고정 후 나머지 배열
정다각형 탁자 (n명) (회전 대칭 있는 탁자)	$n! \div$ (회전 시 겹치는 횟수)	직사각형: $n!/2$ (180° 돌리면 같아지는 경우만 고려). 정삼각형·정오각형 등은 회전 시 겹치는 횟수를 직접 확인

목걸이·팔찌 (서로 다른 n개)	$\dfrac{(n-1)!}{2}$	회전 + 뒤집기로 같아지는 배치 (서로 다른 것만 성립)
이웃 조건 (원형)	이웃할 k명을 묶어 $(n-k+1-1)!$ → 내부 $k!$ 곱	묶음을 한 사람으로 보고 원순열 적용
분리 조건 (원형)	분리 대상 제외 나머지 m명 원형 배열 $(m-1)!$ → 사이 m자리 중 택	원형의 사이 자리 수 = 먼저 배열한 인원 수 m (일렬의 $m+1$과 다름!)

이웃 예시 (원형) 6명 중 A, B가 이웃하여 원탁에 앉기:
{A,B}를 묶어 5명 원순열 → $(5-1)! = 24$, 내부 $2! = 2$ $\therefore 24 \times 2 = 48$

분리 예시 (원형) 6명 중 A, B가 이웃하지 않게 원탁에 앉기:
나머지 4명 원순열 → $(4-1)! = 6$, 사이 4자리 중 2자리 선택·배치 → ${}_4P_2 = 12$ $\therefore 6 \times 12 = 72$
검산: 전체 원순열 $5! = 120$ − 이웃 $48 = 72$ ✓

⚠ **실수 경고**
· 원형인데 $n!$ 하면 틀린다. 반드시 $(n-1)!$.
· 정다각형/회전대칭 탁자: "회전으로 완전히 같아지는 배치가 몇 가지냐"를 먼저 따진다. 직사각형(180° 돌리면 같아지는 경우만 고려)이면 $n!/2$.
· 목걸이·팔찌: 같은 것이 섞이면 2로 단순히 나누는 처리가 맞지 않을 수 있다.
· **원형 분리**: 사이 자리 수 = 먼저 배열한 수 m. 일렬($m+1$)과 혼동 금지!

#4 중복순열

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택해 나열하는 경우의 수

$$ {}_n\Pi_r = n^r $$

함수의 수와 연결: 집합 $A \to B$로의 **함수**의 총 개수 $= |B|^{|A|}$

#5 같은 것이 있는 순열

n개 중 같은 것이 각각 $p, q, r, \ldots$개씩 있을 때 모두 나열하는 경우의 수

$$ \frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots} \qquad (p+q+r+\cdots = n) $$

응용 1 — 격자 최단 경로 오른쪽 m번, 위쪽 n번 이동: $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} = {}_{m+n}C_m$

응용 2 — 장애물이 있는 최단 경로

① 반드시 지나야 하는 거점을 잡아 구간 분리 후 각 구간 경로의 수를 곱한다.

② 또는 전체 경로 수에서 장애물을 지나는 경로 수를 빼는 여사건 방법을 쓴다.

#6 조 나누기와 분배

서로 다른 n개를 p개, q개, r개$(p+q+r=n)$의 조로 나눌 때:

조의 이름이 있는 경우 (A조, B조, C조): $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$

조의 이름이 없는 경우 (원소 수가 모두 다를 때): $\dfrac{n!}{p!\,q!\,r!}$ (그대로)

같은 크기의 조가 k개인 경우: $\dfrac{n!}{(p!)^k \cdot k!}$ ← **반드시 $k!$으로 나눔**

⚠ 실수 경고

· 원소 수가 같은 조가 k개이면 반드시 $k!$으로 나눠야 한다. 조에 이름이 없으면 구별되지 않기 때문.

예) 8명을 4명씩 2조로 나누기: $\dfrac{{}_8C_4}{2!}=35$

응용 — 토너먼트 대진표 8명을 1라운드부터 4경기로 나눌 때:

→ 4쌍(조 크기 2, 4개)으로 나누기: $\dfrac{8!}{(2!)^4 \cdot 4!}$

▶ 순열 소단원 함정 체크

① 이웃 → 묶기 $(n-k+1)! \times k!$, 분리 → 나머지 먼저 배열 후 사이+양끝에 삽입

② 원형이면 $(n-1)!$, 정다각형/회전대칭 탁자는 회전 겹침 횟수로 나눔, 팔찌이면 $(n-1)!/2$

③ 원형 분리: 사이 자리 수 = 먼저 배열한 수 m (일렬의 $m+1$과 다름!)

④ 같은 크기 조 k개 → $k!$으로 나누기

⑤ "A가 B보다 앞" → **A, B에 대한 조건이 똑같을 때만** 전체의 $\dfrac{1}{2}$

◆ 평가원이 이 단원에서 묻는 것

조건이 여러 개 겹칠 때 (이웃 + 특정 자리, 원형 + 이웃 + 분리 혼합). 단순 공식이 아니라 경우를 분류하고 합산하는 능력을 본다. 장애물 경로는 여사건을 쓸지 거점 분할을 쓸지 판단이 핵심.

이웃·분리 조건 | 원순열 유형 구분 | 같은 것이 있는 순열 | 조 나누기 | 장애물 경로 (여사건·거점)

A가 B보다 앞 조건 | 원형 + 이웃·분리 복합 조건

2. 조합

#7 조합

서로 다른 n개에서 순서를 무시하고 r개를 택하는 경우의 수

> $$ {}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}, \quad {}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r \text{ (파스칼 항등식)} $$

#8 함수의 개수 — 유형별 총정리

$X = \{x_1, \ldots, x_m\}$에서 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$으로의 함수 f의 개수:

함수 유형	조건 (쉽게 말하면)	개수
함수 (일반)	아무 제한 없이, X의 각 원소가 Y의 아무 데나 가도 됨	n^m
일대일함수	서로 다른 입력은 반드시 서로 다른 출력 = Y에서 같은 값을 두 번 쓸 수 없다 뒤집어 말하면: 출력이 같으면 입력도 같아야 한다 ($f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$)	${}_nP_m$ (단 $m \le n$)
증가함수	입력이 커지면 출력도 **반드시 커진다** (같은 값 불가) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ = Y에서 m개를 뽑으면 순서가 자동 결정 → 조합	${}_nC_m$ (단 $m \le n$)
감소함수	입력이 커지면 출력은 **반드시 작아진다** (같은 값 불가) $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ = 증가함수를 뒤집은 것 → 개수 동일	${}_nC_m$ (단 $m \le n$)
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ **인 함수** (중복조합형)	입력이 커지면 출력이 **같거나 커진다** (같은 값 OK) = Y에서 중복 허용해서 m개 뽑기 → 중복조합	${}_nH_m$
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ **인 함수** (중복조합형)	입력이 커지면 출력이 **같거나 작아진다** (같은 값 OK) = 위를 뒤집은 것 → 개수 동일	${}_nH_m$
치역이 공역과 같은 함수	Y의 **모든 원소를 적어도 한 번씩 값으로 가지는** 함수 = 빈 상자 없이 서로 다른 물건 나누기와 같다	아래 실전 전략 참조

왜 이렇게 되는지 — 핵심 연결 논리

증가함수: $f(x_1) < f(x_2) < \cdots < f(x_m)$이면, Y에서 m개를 뽑는 순간 "작은 것부터 순서대로 대응"이 자동 결정된다. 그래서 뽑기만 하면 됨 → ${}_nC_m$

감소함수: 마찬가지로 뽑으면 "큰 것부터 순서대로 대응"이 자동. 뽑는 가짓수는 증가함수와 같다 → ${}_nC_m$

$f(x_1) \leq f(x_2)$ **조건**: $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \cdots$이므로 같은 값을 여러 번 써도 된다. 중복 허용해서 뽑기 → ${}_nH_m$

$f(x_1) \geq f(x_2)$ **조건**: 같은 논리, 내림차순 → ${}_nH_m$

★ 치역이 공역과 같은 함수 — 실전 전략

다른 이름: **공역의 모든 원소를 적어도 한 번씩 값으로 가지는 함수** (이 표현이 문제에서 더 자주 등장)

즉, **공역의 어떤 원소도 비어 있지 않다.**

"Y의 모든 원소를 적어도 한 번씩 값으로 가져야 한다" = 빈 상자 없이 서로 다른 물건 나누기

전략 1 — 여사건 (공역이 2~3개일 때 최강)

전체 함수의 수 $-$ Y의 일부 원소만 쓰이는 경우의 수

예) $|X| = 4$, $|Y| = \{a, b\}$일 때: 전체 $2^4 = 16 - $ (a만 쓰는 1가지) $-$ (b만 쓰는 1가지) $= 14$

전략 2 — 조 나누기 후 분배

① 정의역 m개를 공역 원소 수(n개)만큼의 **비어있지 않은 조**로 나눈다

② 각 조를 공역의 원소에 $n!$가지로 대응시킨다

예) $|X| = 4$, $|Y| = \{a, b, c\}$일 때: 4명을 (2,1,1)로 분할하는 방법 = $\dfrac{{}_4C_2 \cdot {}_2C_1 \cdot {}_1C_1}{2!} = 6$, 공역에 분배 $3! = 6$ → $6 \times 6 = 36$

⚠ 실수 경고

· 증가함수 ≠ 일대일함수 (증가함수가 더 강한 조건).

· ${}_nH_m$에서 n은 공역(선택지)의 원소 수, m은 정의역(선택 횟수)의 원소 수. 순서 혼동 금지.

· "치역 = 공역" 문제는 공역이 작으면 여사건이, 크면 조 나누기가 빠르다. 문제 조건 보고 선택.

출제 예시 $X = \{1, 2, 3, 4\}$에서 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$로의 $f(x_1) \leq f(x_2)$ 조건 함수의 수:

${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$

#9 중복조합

서로 다른 n개에서 중복을 허용하여 r개를 택하는 (순서 무시) 경우의 수

$${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$$

#10 방정식의 정수해 — 변형 패턴 총정리

기본형: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$ $(x_i \geq 0)$ → ${}_kH_r$

자연수 해: $x_i \geq 1$ → $x_i' = x_i - 1$로 치환, 합에서 k 빼기 → ${}_kH_{r-k}$

부등식 조건: $x_1 + \cdots + x_k \leq r$ → **새로운 변수 $w \geq 0$를 도입**해 $x_1 + \cdots + x_k + w = r$로 바꾼다 → ${}_{k+1}H_r$

상한 조건: $x_i \leq M$ → 전체 $-$ $(x_i \geq M+1$인 경우), **여사건**으로 처리

계수가 있는 합: $a + 2b + c = n$ 형태 → 계수 있는 변수 b의 값 고정 후 나머지 처리

홀짝 조건: 홀수이면 $x = 2x' + 1$, 짝수이면 $x = 2x'$으로 치환

곱이 0 조건: $(x_1 - a)(x_2 - b)\cdots = 0$ → 적어도 하나가 특정 값 → 경우 분류

★ 큰 틀: 위 변형들은 모두 **여사건 / 치환 / 경우분류** 세 가지 전략으로 풀린다. (절댓값 조건, 나머지 조건, 상·하한 복합 조건은 심화편 참조)

출제 예시 — 부등식 $x + y + z \leq 6$ $(x, y, z \geq 0)$의 정수해:
$w = 6 - (x + y + z) \geq 0$ 도입 → $x + y + z + w = 6$ → ${}_4H_6 = {}_9C_6 = 84$

출제 예시 — 계수 조건 $a + 2b + c = 8$ $(a, b, c \geq 0)$의 정수해:
$b = 0$: $a + c = 8$ → 9가지 / $b = 1$: 7가지 / $b = 2$: 5가지 / $b = 3$: 3가지 / $b = 4$: 1가지 → 합계 25

응용 — 적어도 하나가 특정값 $x + y + z = 10$에서 적어도 하나가 0인 정수해:
→ 여사건: 전체 ${}_3H_{10}$ $-$ 모두 ≥ 1인 경우 ${}_3H_7$

⚠ 실수 경고
· 자연수 해인데 바로 ${}_kH_r$ 쓰면 틀린다 → 치환 후 적용.
· 계수 있는 합은 중복조합 한 번으로 안 된다 → 계수 있는 변수 먼저 고정.

▶ 조합 소단원 함정 체크
① $f(x_1) \leq f(x_2)$ 조건 = 중복조합, 증가함수 = 조합, 치역=공역 조건은 여사건 또는 조 나누기
② 자연수 해 → 치환 먼저, 부등식 → 새로운 변수 w 도입
③ 같은 크기 조 → $k!$ 나눔, 조에 이름 있으면 나누지 않음
④ ${}_nH_m$: n=선택지(공역), m=선택횟수(정의역)

◆ 평가원이 이 단원에서 묻는 것

"$f(x_1) \le f(x_2)$" 조건과 증가함수 혼합 문제. 정수해에 두 가지 조건(상한, 부등식+자연수) 동시 부과. 치역=공역 조건 함수는 자주 출제.

조합 기본 | 함수 유형 구분 | 중복조합 | 정수해 기본·자연수해 | 부등식 → 새로운 변수 도입 | 계수·홀짝 조건 | 치역=공역 조건 (여사건·조나누기)

2-심화. 포함·배제 원리 → 심화편 참조

조건이 여러 개 얽혀 있을 때의 덧셈정리 확장 공식(포함·배제 원리)은 **심화편**에서 자세히 다룹니다. 중간고사에서는 2개 사건까지의 덧셈정리(#16)만 필수이며, 3개 사건 이상과 정수해 상한 조건에 대한 포함·배제 풀이는 심화편을 참고하세요.

3. 이항정리

#11 이항정리와 일반항

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nC_r\, a^{n-r} b^r$$

일반항 (제 $r+1$항): ${}_nC_r\, a^{n-r} b^r \qquad (r = 0, 1, \ldots, n)$

→ "제 k항"을 구하려면 $r = k-1$을 대입한다.

특정 항 구하기: 일반항에서 r을 미지수로 놓고, 원하는 차수 조건을 세워 r을 결정한다.

가운데 항

n이 짝수: 가운데 항 1개 → 제 $\dfrac{n}{2}+1$항 ($r = \dfrac{n}{2}$)

n이 홀수: 가운데 항 2개 → 제 $\dfrac{n+1}{2}$항, 제 $\dfrac{n+3}{2}$항

출제 예시 $\left(x + \dfrac{a}{x^2}\right)^6$ 의 일반항: ${}_6C_r\, a^r\, x^{6-3r}$

x^3의 계수: $6 - 3r = 3 \Rightarrow r = 1$ → 계수 $= 6a$

상수항: $6 - 3r = 0 \Rightarrow r = 2$ → 계수 $= 15a^2$

⚠ 실수 경고

· "제 몇째 항"은 $r+1$번째 항. $r = 0$이 첫째 항.

· $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^n$ 처럼 빼기가 있으면 부호 $(-1)^r$을 반드시 포함.

· 두 이항식의 곱에서 특정 항: 각 일반항의 지수 조건을 연립해야 한다.

#12 이항계수의 성질

전체 합: ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$

교대 합: ${}_nC_0 - {}_nC_1 + \cdots = 0$

짝수/홀수 번째 항: ${}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots = {}_nC_1 + {}_nC_3 + \cdots = 2^{n-1}$

파스칼 누적합 (하키스틱)

우하향 패턴: ${}_rC_r + {}_{r+1}C_r + \cdots + {}_nC_r = {}_{n+1}C_{r+1}$ (시작: ${}_rC_r = 1$)

좌하향 패턴: ${}_rC_0 + {}_{r+1}C_1 + \cdots + {}_nC_{n-r} = {}_{n+1}C_{n-r}$ (시작: ${}_rC_0 = 1$)

→ 어느 방향이든 시작이 1이어야 한다. 중간부터 시작하면 전체에서 빼서 처리.

출제 예시 $\sum_{n=1}^{8} {}_{15}C_{2n-1} = {}_{15}C_1 + {}_{15}C_3 + \cdots + {}_{15}C_{15}$: 홀수 번째 이항계수 합 $= 2^{14}$

#13 다항식 전개에서 항의 개수

$(a+b+c)^n$의 서로 다른 항의 개수 $= {}_3H_n = {}_{n+2}C_2$

출제 예시 $(a+b+c)^7(a+b+c+d)$의 항의 개수:

$= (a+b+c)^8 + d(a+b+c)^7$로 분리

$(a+b+c)^8$: ${}_{10}C_2 = 45$, $d(a+b+c)^7$: ${}_9C_2 = 36$ → 합계 81

▶ 이항정리 소단원 함정 체크

① 제 k항 → $r = k - 1$

② n 짝수 → 가운데 항 1개, 홀수 → 2개

③ 빼기 이항식 → 부호 $(-1)^r$ 확인

④ 파스칼 누적합 → 우하향·좌하향 두 방향 모두 시작이 1이어야 함

일반항 계산 | 제 $r+1$항 · 가운데 항 | 이항계수 합 (2^n) | 홀짝 분리 (2^{n-1}) | $\sum$ 형태 이항계수 | 다항식 항의 개수 | 두 이항식 곱의 계수 | 등차·등비 조건 + 이항계수

02 확률

1. 확률의 뜻과 성질

#14 확률의 종류 [보충·심화]

수학적 확률: 표본공간이 유한이고 각 원소가 같은 가능성을 가질 때, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$

통계적 확률: 실험을 반복할 때 상대도수의 극한값. 큰 수의 법칙에 의해 수학적 확률에 수렴.

기하학적 확률 [참고: 구 교육과정 — 2015 개정에서 제외]: 넓이·길이·부피의 비로 정의. $P(A) = \dfrac{A\text{의 넓이}}{S\text{의 넓이}}$

$$0 \le P(A) \le 1, \quad P(S) = 1, \quad P(\emptyset) = 0$$

#15 배반사건과 여사건

서로 배반: $A \cap B = \emptyset$ → $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

여사건: A^c (사건 A가 일어나지 않는 사건) → $P(A^c) = 1 - P(A)$

⚠ 배반 vs 독립 — 절대 혼동하지 말 것

배반: $A \cap B = \emptyset$ → $P(A \cap B) = 0$

독립: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

확실한 이유: $P(A) > 0$이고 $P(B) > 0$인 두 사건이 배반이면, $P(A \cap B) = 0$인데 $P(A) \cdot P(B) > 0$이므로 $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ → **반드시 종속**.

#16 확률의 덧셈정리

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

서로 배반이면: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

출제 예시 $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$이면 $P(A \cup B) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{11}{24}$

※ 3개 사건 덧셈정리는 심화편 참조.

#17 복원·비복원, 동시·순차 추출 구분

추출 방식	특징	경우의 수	확률 특성
복원 추출	표본공간 불변, 매 시행 독립	n^r	각 시행 확률 동일
비복원 순차	표본공간 감소, 매 시행 종속	${}_nP_r$	각 시행 확률 변화

동시 추출	순서 없는 선택	${}_nC_r$	비복원 순차와 확률값 동일

⚠ 실수 경고

· "동시에 2개"와 "순서대로 1개씩 2번(비복원)"의 **확률값은 같다**. 분자·분모 모두 같은 비율로 바뀌기 때문.

· 비복원 추출의 분모를 36으로 잡으면 틀린다 — 추출할 때마다 남은 개수가 달라진다.

▶ 확률의 뜻과 성질 함정 체크

① 배반 ≠ 독립 ($P(A), P(B) > 0$인 배반 → 종속)

② 적어도 → 여사건

③ 동시 추출 = 비복원 순차 (같은 선택 상황을 순서 없이 본 사건이면 확률값 동일)

④ 복원이면 각 시행 확률 동일, 비복원이면 매번 달라짐

수학적·통계적 확률 | 여사건 | 덧셈정리 | 배반 vs 독립 | 복원·비복원 구분 | 덧셈정리 역방향 · 복잡한 사건 분류

2. 조건부 확률

#18 조건이 붙으면 분모가 바뀐다 — 표본공간 다시 잡기

⚠ 핵심 원칙

"A일 때", "$a > b$일 때", "짝수를 뽑았을 때"처럼 **조건이 붙는 순간, 새 표본공간은 사건 A가 된다.**

새 분모: $n(A)$ (또는 $P(A)$) → 이 안에서 원하는 사건 B: $n(A \cap B)$ (또는 $P(A \cap B)$)

조건 후의 경우들이 여전히 같은 가능성을 가질 때만 경우의 수 비율로 계산한다.

예시 1 주사위 2개 던져 $a > b$일 때 $a - b = 3$일 확률:

새 표본공간($a > b$): ${}_6C_2 = 15$가지. $a - b = 3$: $(4, 1), (5, 2), (6, 3)$ → 3가지

$P = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$

예시 2 1~10에서 짝수를 뽑았을 때, 4의 배수일 확률:

새 표본공간: $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ → 5가지. 4의 배수: $\{4, 8\}$ → 2가지

$P = \frac{2}{5}$

#19 조건부 확률

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (P(A) > 0)$$

표 문제 전략: 조건에 해당하는 행/열 합계 → 분모, 교집합 칸 → 분자

★ 2×2 사건표 템플릿 — 모든 조건부 확률의 뼈대

두 사건 A, B의 확률 관계는 아래 4칸만 채우면 끝난다.

	B	B^c	행 합
A	$P(A\cap B)$	$P(A\cap B^c)$	$P(A)$
A^c	$P(A^c\cap B)$	$P(A^c\cap B^c)$	$P(A^c)$
열 합	$P(B)$	$P(B^c)$	1

채우는 순서: ① 주어진 값 기입 → ② 같은 행/열의 나머지 칸은 뺄셈으로 채움 → ③ 전체 합 $=1$로 검산

조건부 확률 바로 읽기: $P(B|A)$ = (A행의 B칸) ÷ (A행 합) = $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$

※ 확률 대신 **경우의 수를 먼저 써 놓고 마지막에 전체로 나눠도** 된다. 학교 시험에선 오히려 더 직관적.

#20 확률의 곱셈정리

$$P(A\cap B)=P(A)\,P(B\mid A)=P(B)\,P(A\mid B)$$

연속 추출, 다단계 시행에서 단계별로 확률을 곱한다.

#21 독립사건 — 여사건 4쌍 모두 독립

독립: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)\iff P(B\mid A)=P(B)$

종속: 독립이 아닌 경우

★ A와 B가 독립이면 다음 4쌍이 모두 독립이다.

① A와 B ② A와 B^c ③ A^c와 B ④ A^c와 B^c

증명 스케치: $P(A\cap B^c)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c)$

→ A와 B^c 독립. 나머지 두 쌍도 동일하게 성립.

⚠ 실수 경고

· 독립 ≠ 배반. $P(A),P(B)>0$인 배반사건은 반드시 종속.

· 독립 확인은 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$를 직접 계산해서 비교. "복원 추출이니까 독립"처럼 이유만으로 판단하지 말 것.

#22 조건부 확률 심화 활용 — 결과가 주어졌을 때 원인을 찾을 확률 (일반 용어: 전확률 공식 · 베이즈형

문제)

확률의 분할 합 (분모 구하기): 표본공간을 나누는 배반사건 $A_1, A_2, ...$이 있을 때
(즉, A_i끼리 서로 배반이고 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots = S$: 일어날 수 있는 모든 원인을 빠짐없이 나눈 상태. 가장 흔한 경우: $A \cap A^c = \emptyset$이고 $A \cup A^c = S$인 이분할)

$$P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2) + \cdots$$

결과가 주어졌을 때 원인의 확률 (결과 B가 일어났을 때 어떤 원인 A_i에서 온 것인지)

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

→ 분모는 확률의 분할 합으로 계산. 분자는 "그 원인을 거쳐서 결과가 나올 확률"

출제 예시 — 결과에서 원인 찾기 주머니 A(흰3 검2), B(흰1 검4) 중 하나를 선택해 흰 공을 뽑았을 때, A에서 뽑혔을 확률:

$$P(\mathrm{A} \mid \text{흰}) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{3}{4}$$

▶ 조건부 확률 소단원 함정 체크

① "~일 때" → 표본공간 다시 잡기 (분모 바꿈)

② 배반 ≠ 독립

③ A, B 독립이면 여사건 4쌍 모두 독립

④ 결과가 주어졌을 때 원인의 확률 → 분모는 확률의 분할 합(곱셈정리+덧셈정리)으로 계산

◆ 평가원이 이 단원에서 묻는 것

"조건이 붙으면 표본공간이 바뀐다"는 것을 놓치게 만드는 문제가 핵심. 특히 여러 번 시행 후 조건이 주어지는 경우. 독립 여부를 직접 계산으로 확인해야 하는 문제.

표본공간 다시 잡기 | 조건부 확률 | 곱셈정리 | 2×2 사건표 채우기 | 독립 · 여사건 4쌍 | 확률의 분할 합 | 결과 → 원인 확률 | 복잡한 다단계 조건부 확률

3. 독립시행의 확률

#23 독립시행의 확률

한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, n번 반복 독립시행에서 A가 정확히 k번 일어날 확률:

⚠ **사용 전제**: 독립시행 공식은 **매 시행의 성공확률이 모두 p로 같은 상황**에서만 쓸 수 있다.

· 비복원 추출 → 매번 확률이 달라지므로 독립시행 공식 사용 **불가**.

· 시행마다 조건이 바뀌면 → 단계별로 곱셈정리 적용해야 한다.

$${}_{n}C_{k}\, p^{k}(1-p)^{n-k} \qquad (k=0,1,\dots,n)$$

조건별 계산 정리

정확히 k번: ${}_{n}C_{k}\, p^{k}(1-p)^{n-k}$

적어도 k번: $1-[P(0\text{번})+\cdots+P((k-1)\text{번})]$

많아야 k번: $P(0\text{번})+P(1\text{번})+\cdots+P(k\text{번})$

a번 이상 b번 이하: $P(a\text{번})+P(a+1\text{번})+\cdots+P(b\text{번})$

응용 — 수직선 위 점의 이동

앞면이 나오면 $+a$, 뒷면이 나오면 $-b$ 이동할 때, n번 던져 최종 위치가 X이려면:

앞면 k번, 뒷면 $(n-k)$번이라 하면 $ka-(n-k)b=X$를 풀어 k를 구한 뒤 독립시행 공식 적용.

k가 정수·범위 내인지 반드시 확인한다.

응용 — 좌표평면 위 점의 이동

1회 시행 시 x축 방향 $+a$ 또는 y축 방향 $+b$ 이동하는 두 종류의 결과가 나올 때,

총 n번 시행 후 최종 좌표 $(X,\ Y)$에 도달하려면: x축 이동 k번, y축 이동 $(n-k)$번이라 하면

$ka=X$, $(n-k)b=Y$를 연립하여 k를 구한 뒤 독립시행 공식 적용.

"처음으로" 성공 유형

· k번째에서 **처음으로** 성공할 확률: 앞 $(k-1)$번 실패, k번째 성공 → $(1-p)^{k-1}\cdot p$

· **마지막(n번째)에 성공**하는 경우: n번 중 정확히 r번 성공 & 마지막이 성공 → ${}_{n-1}C_{r-1}\, p^{r}(1-p)^{n-r}$

출제 예시 주사위 5번 던져 6이 정확히 2번 나올 확률: ${}_{5}C_{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$

⚠ 실수 경고

· 비복원 추출이면 각 시행이 종속 → 독립시행 공식 사용 불가.

· p는 성공 확률, k는 성공 횟수. 지수 위치 혼동 금지.

· 수직선 이동 문제: k가 음수이거나 n을 초과하면 그 경우는 불가능.

▶ 독립시행 소단원 함정 체크

① 비복원 추출 → 독립시행 공식 사용 불가

② 수직선 이동 → 방정식 풀어 k 구한 뒤 공식 적용

③ 좌표평면 이동 → 연립방정식으로 k 결정

④ 적어도 → 여사건, 많아야 → 직접 합산

⑤ "처음으로 k번째에 성공" → $(1-p)^{k-1} \cdot p$

⑥ a번 이상 b번 이하 → 각 항 합산

독립시행 공식 | 조건별 계산 (at least/most) | 수직선·좌표 위 점 이동 | 처음으로 성공 유형 | 두 종류 시행 혼합

▶ 심화편에서 다루는 내용

· 순열: 교란순열, 마주보기·교대 배열

· 조합/함수: 합성함수 $f(f(x))$, 함숫값 합 조건, 3차원 격자, 중복조합+치역=공역 복합

· 정수해: 절댓값·나머지·상·하한 복합

· 포함·배제 원리 독립 소단원 (2·3개 사건, 4단계 프로토콜)

· 이항계수: 계수 곱셈형 $r \cdot {}_nC_r$, $r(r-1) \cdot {}_nC_r$

· 확률: 3개 사건 덧셈정리, 곱 사건 여사건 세분화

· 조건부: 2×2 사건표, 비례식 미지수, 제비뽑기 공정성

· 곱셈정리: 토너먼트 대진표, 무승부 반복 게임

· 독립시행: N전 M선승제, 경계 도달 함정, $P(k)$ 최대, 조건부 역추적