유제 변형 (3배수) — 정답 및 해설

세트 A

빠른 정답 (세트 A)

1	2	3	4	5	6
②	③	②	③	②	④

1

$\lim_{n\to\infty} \frac{3a_n-1}{2} = 7$ 이므로 수렴하는 수열의 극한 성질에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+3n}{n\,a_n(a_n-2)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{n}+3}{a_n(a_n-2)} \\ &= \frac{0+3}{5(5-2)} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

정답 ②

2

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $(\alpha>0, \beta>0)$라 하면 주어진 조건에 의하여

$$\alpha-\beta=2, \quad \alpha\beta=2$$

$\alpha=\beta+2$ 를 $\alpha\beta=2$ 에 대입하면

$$(\beta+2)\beta=2 \implies \beta^2+2\beta-2=0$$

$\beta>0$ 이므로 $\beta=-1+\sqrt{3}$ 이고, $\alpha=1+\sqrt{3}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-1}+\frac{a_n}{b_n+1}\right) \\ &= \frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta+1} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\end{aligned}$$

정답 ③

3

분모와 분자를 각각 유리화하면

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right)}{\sqrt{n^2+7n}-\sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n^2+2-n^2)\left(\sqrt{n^2+7n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)(n^2+7n-n^2-n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n\left(\sqrt{n^2+7n}+\sqrt{n^2+n}\right)}{6n\left(\sqrt{n^2+2}+n\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{7}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{6\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1\right)} \\ &= \frac{2(1+1)}{6(1+1)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

정답 ②

4

곡선 $y=\sqrt{2x}$ 와 직선 $y=\sqrt{n}$ 이 만나는 점의 x좌표는 $\sqrt{2x}=\sqrt{n}$ 에서 $x=\frac{n}{2}$ 이다. 따라서 $\mathrm{A}_n\left(\frac{n}{2},\sqrt{n}\right)$ 이고 $\mathrm{B}_n\left(\frac{n}{2},0\right)$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{\frac{n^2}{4}+n}$, $\overline{\mathrm{OB}_n}=\frac{n}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}_n}-\overline{\mathrm{OB}_n}) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2}{4}+n}-\frac{n}{2}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{4}+n-\frac{n^2}{4}}{\sqrt{\frac{n^2}{4}+n}+\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{n}}+\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1\end{aligned}$$

정답 ③

5

분모와 분자를 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 의 꼴로 정리한 후 분모의 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 나눈다.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{2^{-n-1} + 4^{-n+2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 4\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 16\left(\frac{1}{4}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} + 16\left(\frac{1}{2}\right)^n} \\
&= \frac{1+0}{\frac{1}{2}+0} = 2
\end{aligned}$$

정답 ②

6

수열 $\left\{\left(\frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{4}\right)^n\right\}$ 이 수렴하기 위한 공비의 조건은

$$-1 < \frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{4} \le 1$$

(i) $-1 < \frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{4}$ 에서 $x^2 - 4x + 3 > 0$

$$(x-1)(x-3) > 0 \implies x < 1 \text{ 또는 } x > 3$$

(ii) $\frac{x^2}{4} - x - \frac{1}{4} \le 1$ 에서 $x^2 - 4x - 5 \le 0$

$$(x+1)(x-5) \le 0 \implies -1 \le x \le 5$$

(i), (ii)에 의하여 공통 범위는 $-1 \le x < 1$ 또는 $3 < x \le 5$ 이다. 이를 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 4, 5$ 의 총 4개이다.

정답 ④

세트 B

빠른 정답 (세트 B)

1	2	3	4	5	6
④	④	⑤	③	③	④

1

$\lim_{n\to\infty} \frac{5a_n + 2}{3} = 6$ 이므로 수렴하는 수열의 극한 성질에 의하여 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{16}{5}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + 4n}{n\,a_n(a_n - 1)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\frac{a_n}{n} + 4}{a_n(a_n-1)} \\
&= \frac{0+4}{\frac{16}{5}\left(\frac{16}{5} - 1\right)} \\
&= \frac{4}{\frac{16}{5}\cdot\frac{11}{5}} = \frac{100}{176} = \frac{25}{44}
\end{aligned}$$

정답 ④

2

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$라 하면

$$\alpha - \beta = 1, \quad \alpha\beta = \frac{3}{2}$$

$\alpha = \beta + 1$ 을 대입하면 $(\beta+1)\beta = \frac{3}{2} \implies 2\beta^2 + 2\beta - 3 = 0$

$\beta > 0$ 이므로 $\beta = \frac{-1+\sqrt{7}}{2}$ 이고, $\alpha = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n - 2} + \frac{a_n}{b_n + 1}\right) \\
&= \frac{\beta}{\alpha - 2} + \frac{\alpha}{\beta + 1} \\
&= \frac{\frac{-1+\sqrt{7}}{2}}{\frac{-3+\sqrt{7}}{2}} + \frac{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}{\frac{1+\sqrt{7}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{7} - 3} + 1 \\
&= \frac{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+3)}{7 - 9} + 1 \\
&= \frac{4 + 2\sqrt{7}}{-2} + 1 \\
&= -2 - \sqrt{7} + 1 = -\sqrt{7} - 1
\end{aligned}$$

정답 ④

3

분모와 분자를 각각 유리화하면

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)}{\sqrt{n^2+8n}-\sqrt{n^2+2n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n^2+3-n^2)\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2+2n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)(n^2+8n-n^2-2n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\left(\sqrt{n^2+8n}+\sqrt{n^2+2n}\right)}{6n\left(\sqrt{n^2+3}+n\right)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{8}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)}{6\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1\right)}\\&=\frac{3(1+1)}{6(1+1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

정답 ⑤

4

곡선 $y=\sqrt{3x}$ 와 직선 $y=\sqrt{n}$ 이 만나는 점은 $\mathrm{A}_n\left(\frac{n}{3},\sqrt{n}\right)$ 이고 $\mathrm{B}_n\left(\frac{n}{3},0\right)$ 이다. $\overline{\mathrm{OA}_n}=\sqrt{\frac{n^2}{9}+n}$, $\overline{\mathrm{OB}_n}=\frac{n}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{OA}_n}-\overline{\mathrm{OB}_n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2}{9}+n}-\frac{n}{3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n^2}{9}+n}+\frac{n}{3}}\\&=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

정답 ③

5

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}{2^{-n-2}+4^{-n+2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+8\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n+16\left(\frac{1}{4}\right)^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1+8\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{4}+16\left(\frac{1}{2}\right)^n}\\&=\frac{1+0}{\frac{1}{4}+0}=4\end{aligned}$$

정답 ③

6

수열 $\left\{\left(\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{6}\right)^n\right\}$ 이 수렴하기 위한 공비의 조건은

$$-1<\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{6}\le 1$$

(i) $-1<\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{6}$ 에서 $x^2-5x+6>0$

$$(x-2)(x-3)>0 \implies x<2 \text{ 또는 } x>3$$

(ii) $\frac{x^2}{6}-\frac{5x}{6}\le 1$ 에서 $x^2-5x-6\le 0$

$$(x+1)(x-6)\le 0 \implies -1\le x\le 6$$

(i), (ii)에 의하여 공통 범위는 $-1\le x<2$ 또는 $3<x\le 6$ 이다. 이를 만족시키는 정수 x는 $-1,0,1,4,5,6$ 의 총 6 개이다.

정답 ④

세트 C

빠른 정답 (세트 C)

1	2	3	4	5	6
②	⑤	⑤	①	②	①

1

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n-3}{4}=1$ 이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{7}{2}$ 이다.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n+5n}{n\,a_n(a_n+1)}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3\frac{a_n}{n}+5}{a_n(a_n+1)}\\&=\frac{0+5}{\frac{7}{2}\left(\frac{7}{2}+1\right)}\\&=\frac{5}{\frac{7}{2}\cdot\frac{9}{2}}=\frac{20}{63}\end{aligned}$$

정답 ②

2

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ $(\alpha > 0, \beta > 0)$라 하면

$$\alpha - \beta = 3, \quad \alpha\beta = 3$$

$(\beta+3)\beta = 3 \implies \beta^2 + 3\beta - 3 = 0$ $\beta > 0$ 이므로 $\beta = \frac{-3+\sqrt{21}}{2}$, $\alpha = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n-1} + \frac{a_n}{b_n+2}\right) \\
&= \frac{\beta}{\alpha-1} + \frac{\alpha}{\beta+2} \\
&= \frac{\frac{-3+\sqrt{21}}{2}}{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} + \frac{\frac{3+\sqrt{21}}{2}}{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{21}-3}{\sqrt{21}+1} + \frac{\sqrt{21}+3}{\sqrt{21}+1} \\
&= \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{21}+1} = \frac{2\sqrt{21}(\sqrt{21}-1)}{20} \\
&= \frac{21-\sqrt{21}}{10}
\end{aligned}$$

정답 ⑤

3

분모와 분자를 각각 유리화하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(\sqrt{n^2+5}-n\right)}{\sqrt{n^2+11n}-\sqrt{n^2+5n}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n(5)\left(\sqrt{n^2+11n}+\sqrt{n^2+5n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+5}+n\right)(6n)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{5\left(\sqrt{1+\frac{11}{n}}+\sqrt{1+\frac{5}{n}}\right)}{6\left(\sqrt{1+\frac{5}{n^2}}+1\right)} \\
&= \frac{5(1+1)}{6(1+1)} = \frac{5}{6}
\end{aligned}$$

정답 ⑤

4

교점 A_n의 좌표는 $\left(\frac{n}{4}, \sqrt{n}\right)$ 이고 $\mathrm{B}_n\left(\frac{n}{4}, 0\right)$ 이므로 $\overline{\mathrm{OA}_n} = \sqrt{\frac{n^2}{16}+n}$, $\overline{\mathrm{OB}_n} = \frac{n}{4}$ 이다.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\overline{\mathrm{OA}_n} - \overline{\mathrm{OB}_n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n^2}{16}+n} - \frac{n}{4}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n^2}{16}+n}+\frac{n}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = 2
\end{aligned}$$

정답 ①

5

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}}{3^{-n-1}+9^{-n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9\left(\frac{1}{9}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1+9\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}+9\left(\frac{1}{3}\right)^n} \\
&= \frac{1+0}{\frac{1}{3}+0} = 3
\end{aligned}$$

정답 ②

6

수열 $\left\{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1\right)^n\right\}$ 이 수렴하기 위한 공비의 조건은

$$-1<\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1\le 1$$

(i) $-1<\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1$ 에서 $x^2-3x>0$

$$x(x-3)>0 \implies x<0 \text{ 또는 } x>3$$

(ii) $\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-1\le 1$ 에서 $x^2-3x-4\le 0$

$$(x+1)(x-4)\le 0 \implies -1\le x\le 4$$

(i), (ii)에 의하여 공통 범위는 $-1\le x<0$ 또는 $3<x\le 4$ 이다. 이를 만족시키는 정수 x는 $-1, 4$ 의 총 2개이다.

정답 ①