1. $9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$9^{\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 3^0 = 1$

2. 함수 $f(x) = 3x^3 + 4x + 1$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$의 값은? [2점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$f'(x) = 9x^2 + 4$

$f'(1) = 13$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{4}(2a_k - k) = 0$일 때, $\sum_{k=1}^{4} a_k$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$2\sum_{k=1}^{4} a_k = \frac{4(4+1)}{2} = 10$$

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = 5$$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & (x < 1) \\ x^2 - 3x + a & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$3 - 2 = 1 - 3 + a$$

$$a = 3$$

5. 함수 $f(x)=(x+2)(2x^2-x-2)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=(2x^2-x-2)+(x+2)(4x-1)$

$f'(1)=-1+9=8$

6. 1보다 큰 두 실수 a, b가

$$\log_a b=3,\quad \log_3\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킬 때, $\log_9 ab$의 값은? [3점]

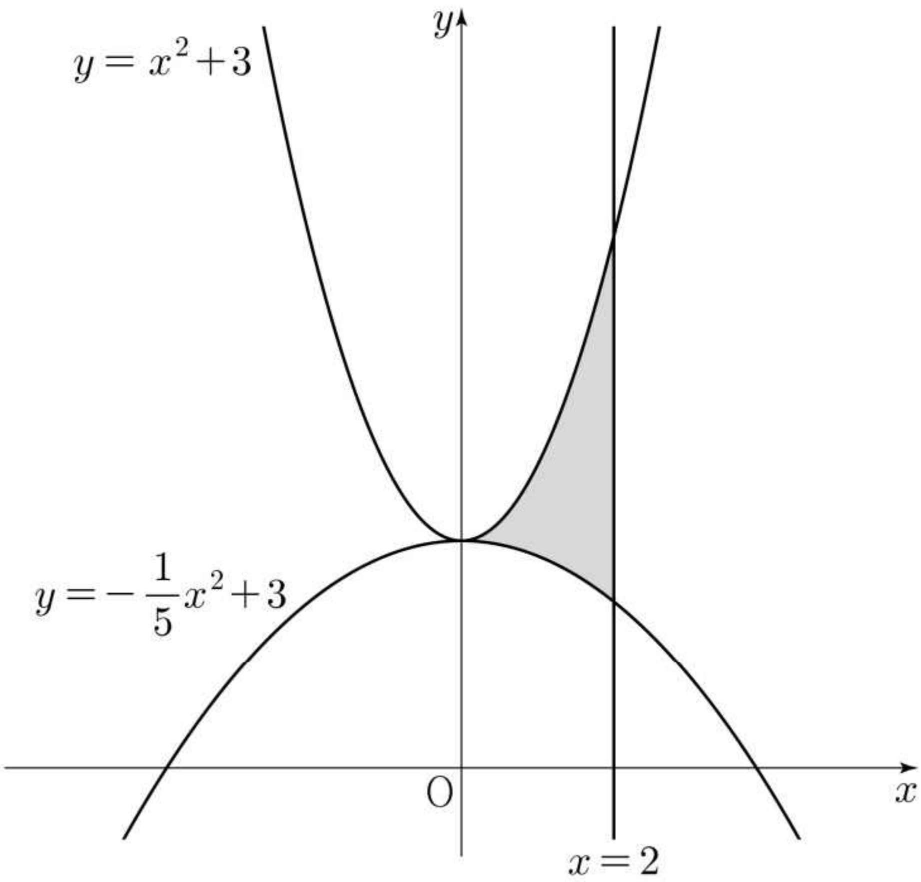
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$b=a^3$, $\log_3 a^2=\frac{1}{2}$

$\log_9 ab=\log_9 a^4=\log_3 a^2=\frac{1}{2}$

7. 두 곡선 $y=x^2+3$, $y=-\frac{1}{5}x^2+3$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{5}$ ② $\frac{7}{2}$ ③ $\frac{17}{5}$ ④ $\frac{33}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$



$$\int_0^2\left\{(x^2+3)-\left(-\frac{1}{5}x^2+3\right)\right\}dx$$

$$=\int_0^2\frac{6}{5}x^2dx=\left[\frac{2}{5}x^3\right]_0^2=\frac{16}{5}$$

8. $\sin\theta+3\cos\theta=0$이고 $\cos(\pi-\theta)>0$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0

④ $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta>0,\ \cos\theta<0$

$\sin\theta=-3\cos\theta>0$

$\cos\theta=-\frac{1}{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ \sin^2\theta+\frac{1}{9}\sin^2\theta=1$

$\sin^2\theta=\frac{9}{10}$

$\sin\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

9. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3+3ax^2-9a^2x+4$$

라 하자. 직선 $y=5$가 곡선 $y=f(x)$에 접할 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2=3(x-a)(x+3a)$

$f(-3a)=-27a^3+27a^3+27a^3+4=5,\ a=\dfrac{1}{3}$

$f(x)=x^3+x^2-x+4$

$f(2)=8+4-2+4=14$

10. 상수 $a\,(a>1)$에 대하여 곡선 $y=a^x-2$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 B, 곡선 $y=a^x-2$의 점근선과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고 삼각형 AOC의 넓이가 8일 때, $a\times\overline{\mathrm{OB}}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $2^{\frac{13}{6}}$ ② $2^{\frac{7}{3}}$ ③ $2^{\frac{5}{2}}$ ④ $2^{\frac{8}{3}}$ ⑤ $2^{\frac{17}{6}}$

$\mathrm{A}\left(\log_a 4,\ 2\right)$

$\frac{1}{2}\times\log_a 4\times 4=8,\ a^4=4,\ a=2^{\frac{1}{2}}$

$\mathrm{B}(4,0)$

$a\times\overline{\mathrm{OB}}=2^{\frac{1}{2}}\times 4=2^{\frac{5}{2}}$

11. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 실수 k에 대하여 시각이 $t(t \geq 0)$일 때 점 P의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t^2-kt+4$$

이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $k=0$이면, 시각 $t=1$일 때 점 P의 위치는 $\frac{13}{3}$이다.

ㄴ. $k=3$이면, 출발한 후 점 P의 운동 방향이 한 번 바뀐다.

ㄷ. $k=5$이면, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는 3이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\int_0^1 (t^2+4)dt = \frac{1}{3}+4=\frac{13}{3}$ (참)

ㄴ. $v(t)=t^2-3t+4$

$D=9-16<0$

이므로 운동 방향을 바꾸지 않는다. (거짓)

ㄷ. $v(t)=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$

$$\int_0^1 (t^2-5t+4)dt - \int_1^3 (t^2-5t+4)dt = 3$$

(참)

12. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$2(a_1+a_4+a_7)=a_4+a_7+a_{10}=6$$

을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

① $\frac{22}{7}$ ② $\frac{24}{7}$ ③ $\frac{26}{7}$ ④ $\frac{30}{7}$ ⑤ $\frac{32}{7}$

$$\frac{a_4+a_7+a_{10}}{a_1+a_4+a_7}=r^3=2$$

$$a_4+a_7+a_{10}=\frac{a_{10}}{r^6}+\frac{a_{10}}{r^3}+a_{10}$$
$$=a_{10}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1\right)=\frac{7}{4}a_{10}=6$$

$$a_{10}=\frac{24}{7}$$

13. 함수 $f(x)=x^2-4x-3$에 대하여

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ -6)$에서의 접선을 l이라 하고,

함수 $g(x)=\left(x^3-2x\right)f(x)$에 대하여

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,6)$에서의 접선을 m이라 하자.

두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① 21　② 28　③ 35　④ 42　⑤ 49

$f'(x)=2x-4$

l : $y=-2x-4$

$g'(x)=\left(3x^2-2\right)f(x)+\left(x^3-2x\right)f'(x)$

$g'(1)=-6+2=-4$

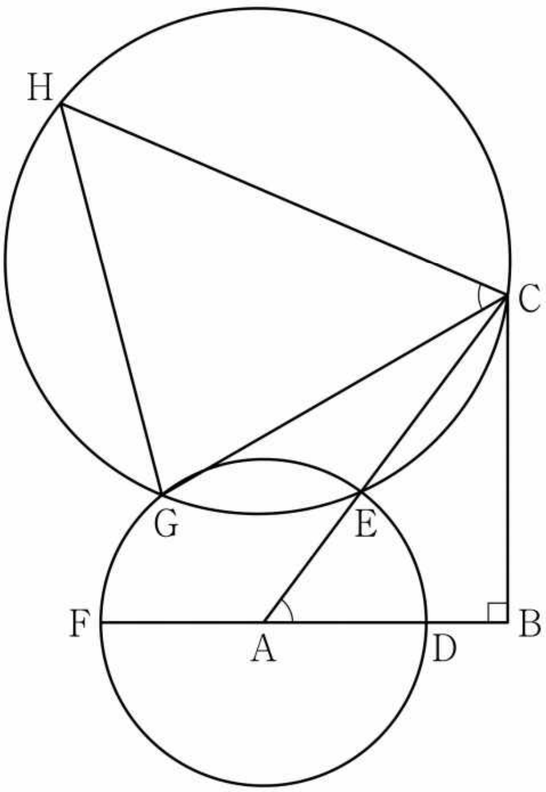
m : $y=-4x+10$

두 직선 l, m의 교점은 $(7,\ -18)$

두 직선 l, m과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{10-(-4)\}\times7=49$

14. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$이고 $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AD}$인 원이 선분 AC와 만나는 점을 E, 직선 AB가 이 원과 만나는 점 중 D가 아닌 점을 F라 하고, 호 EF 위의 점 G를 $\overline{CG}=2\sqrt{6}$이 되도록 잡는다. 세 점 C, E, G를 지나는 원 위의 점 H가 $\angle HCG=\angle BAC$를 만족시킬 때, 선분 GH의 길이는? [4점]



① $\frac{6\sqrt{15}}{5}$　　② $\frac{38\sqrt{10}}{25}$　　③ $\frac{14\sqrt{3}}{5}$

④ $\frac{32\sqrt{15}}{25}$　　⑤ $\frac{8\sqrt{10}}{5}$

$\overline{AE} = \overline{AG} = 2$, $\overline{EC} = 3$

$$\cos(\angle CAG) = \frac{25+4-24}{2\times2\times5} = \frac{1}{4}$$

$$\overline{EG} = \sqrt{4+4-2\times4\times\frac{1}{4}} = \sqrt{6}$$

$$\cos(\angle ECG) = \frac{24+9-6}{2\times2\sqrt{6}\times3} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\sin(\angle ECG) = \sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{6}}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{8}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = \frac{\overline{GH}}{\sin(\angle GCH)}$$

$$\overline{GH} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} \times \frac{4}{5} = \frac{32\sqrt{15}}{25}$$

15. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} -x^2 & (x<0) \\ x^2-x & (x\geq 0) \end{cases}$$

이고, 양수 a에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} ax+a & (x<-1) \\ 0 & (-1\leq x<1) \\ ax-a & (x\geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $h(x)=\int_0^x \left(g(t)-f(t)\right)dt$가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 a의 최댓값을 k라 하자. $a=k$일 때, $k+h(3)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ $\frac{17}{2}$

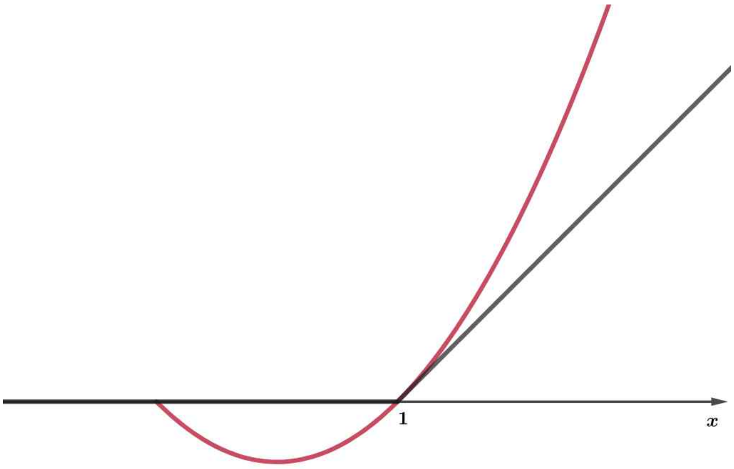
$h'(x) = g(x) - f(x)$ 이고

$a > 0$이고 $x \geq 1$인 구간을 조사해보면

$x^2 - x = a(x-1)$, $(x-1)(x-a) = 0$

이므로 $x \geq 1$인 구간에서 극값을 한번 갖는다.

예시) $a = 1$일 때



따라서 $x < -1$에서 극값을 갖지 않아야 하므로

$-x^2 = ax + a$

$x^2 + ax + a = 0$

$D = a^2 - 4a \leq 0$

$0 < a \leq 4$

$k = 4$

$$h(3) = \int_0^1 (-t^2 + t)dt + \int_1^3 (-t^2 + 5t - 4)dt$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$k + h(3) = \frac{15}{2}$$

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = n^2 a_n + 1$$

을 만족시킨다. a_3의 값을 구하시오. [3점]

$a_2 = 2$

$a_3 = 8 + 1 = 9$

17. 함수 $f(x) = 4x^3 - 2x$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(0) = 4$일 때, $F(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$F(x) = x^4 - x^2 + 4$

$F(2) = 16 - 4 + 4 = 16$

18. $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=6$이고 $\cos(\angle BAC)=-\dfrac{3}{5}$인 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오. [3점]

$$\frac{1}{2}\times 5\times 6\times\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=12$$

19. $-2\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$-k\le 2x^3+3x^2-12x-8\le k$$

가 성립하도록 하는 양수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-8$

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f(-2)=12,\ f(1)=-15$

$k\ge 15$

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

- $a_1 = 7$
- 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10$$

이다.

다음은 $\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1}$의 값을 구하는 과정이다.

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) + \boxed{(가)}$$

이고, 이 식을 정리하면

$$2a_n + a_{n+1} = 3 \times \boxed{(가)} \qquad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이다.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{6}n + 10 \ (n \geq 2)$$

에서 양변에 $n=2$를 대입하면

$$a_2 = \boxed{(나)} \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

이다. ㉠과 ㉡에 의하여

$$\sum_{k=1}^{12} a_k + \sum_{k=1}^{5} a_{2k+1} = a_1 + a_2 + \sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1} + a_{2k+2})$$

$$= \boxed{(다)}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{p \times q}{f(12)}$의 값을 구하시오. [4점]

(가) : $\dfrac{n}{3}$

(나) $p=10$

(다) $7+10+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)$

$$=17+2\times\frac{5\times6}{2}+5$$

$$=52$$

$$\frac{p\times q}{f(12)}=\frac{10\times52}{\frac{12}{3}}=130$$

21. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} -f(x) & (x<t) \\ f(x) & (x \geq t) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to a+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 존재한다.
(나) $\displaystyle\lim_{x\to m+}\frac{g(x)}{x(x-2)}$의 값이 음수가 되도록 하는 자연수 m의 집합은 $\left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}$이다.

$g(-5)$의 값을 구하시오. (단, $g(-1)\neq -\frac{7}{2}g(1)$) [4점]

$f(t)=0$

$g(0)=0,\ g(2)=0$

$f(0)=f(2)=0$

$f(x)=x(x-2)(ax+b)(a>0)$

$g(-1)>0,\ g(1)<0$

$t=2\ \left\{g(-1),\ -\frac{7}{2}g(1)\right\}=\{2,\ 3\}$

$$g(-1) = -f(-1) = -3(-a+b) = 3$$

$$g(1) = -f(1) = a+b$$

$$-\frac{7}{2}g(1) = -\frac{7}{2}(a+b) = 2$$

$$b = -\frac{11}{14},\ a = \frac{3}{14}$$

$$f(x) = x(x-2)\left(\frac{3}{14}x - \frac{11}{14}\right)$$

$$g(-5) = -f(-5) = 65$$

22. 곡선 $y=\log_{16}(8x+2)$ 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ b)$와 곡선 $y=4^{x-1}-\frac{1}{2}$ 위의 점 B가 제1사분면에 있다. 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이 직선 OB 위에 있고 선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{77}{8},\ \frac{133}{8}\right)$일 때, $a\times b=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$b=\log_{16}(8a+2)$, $16^{b}=8a+2$

$\mathrm{B}(r,\ s)$라 하면 $s=4^{r-1}-\frac{1}{2}$, $4^{r}-2=4s$

$$\left(\frac{a+r}{2},\ \frac{b+s}{2}\right)=\left(\frac{77}{8},\ \frac{133}{8}\right)$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$는 직선 OB 위에 있으므로 $b=rk$, $a=sk$라 할 수 있고 $16^{b}=8a+2$에 대입하면 $16^{rk}=8sk+2$이다.

또한 $4^{r}-2=4s$ 이므로 $k=\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

따라서 $p=2b$, $q=2a$ 이므로

$b=\frac{7}{4}$, $a=\frac{63}{4}$

$a\times b=\frac{441}{16}$

$p+q=457$