23. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{2x}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 6x}{2x} = 3$$

24. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x (1 - \sin^2 x)}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{1} \sqrt{t}\, dt = \frac{2}{3}$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

25. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sqrt{9n^2-5}+2n < a_n < 5n+1$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}$의 값은? [3점]

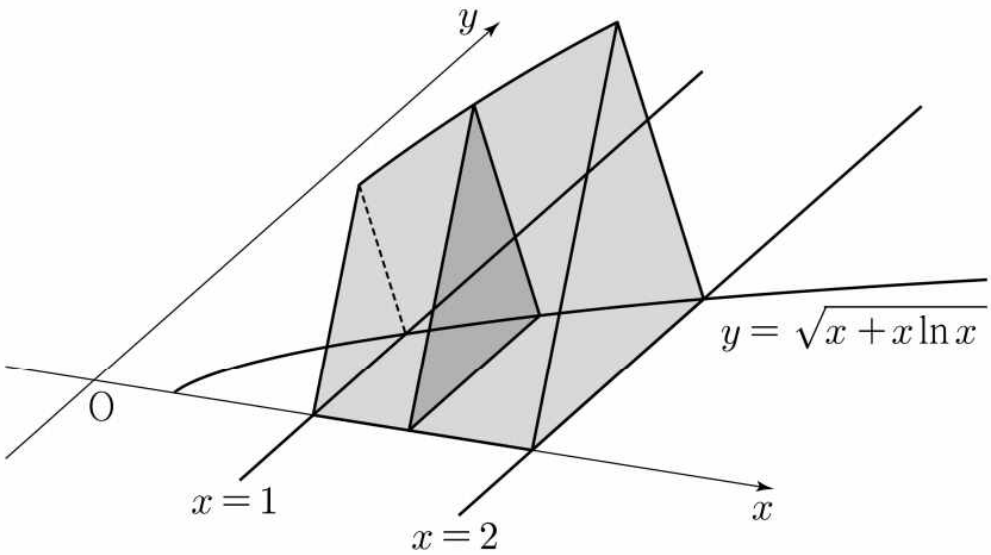
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\frac{5}{2}$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x+x\ln x}$ 와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\dfrac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}(5+12\ln 2)}{24}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}(1+12\ln 2)}{16}$

④ $\dfrac{\sqrt{3}(1+2\ln 2)}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}(1+9\ln 2)}{12}$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^2 x(1+\ln x)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\left[\frac{1}{2}x^2(1+\ln x)\right]_1^2-\int_1^2\frac{1}{2}x^2\times\frac{1}{x}dx\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{1}{2}x^2(1+\ln x)-\frac{1}{4}x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16}$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

27. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = e^{4t}(1+\sin^2\pi t), \quad y = e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)$$

를 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y = 3x - 5e$와 만나는 점을 P라 할 때, 곡선 C 위의 점 P에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\dfrac{3\pi-4}{\pi+4}$ ② $\dfrac{3\pi-2}{\pi+6}$ ③ $\dfrac{3\pi}{\pi+8}$

④ $\dfrac{3\pi+2}{\pi+10}$ ⑤ $\dfrac{3\pi+4}{\pi+12}$

$$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t) = 3e^{4t}(1+\sin^2\pi t) - 5e$$

$$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t) = 3e^{4t}(2-\cos^2\pi t) - 5e$$

$$5e^{4t} = 5e,\ t = \frac{1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{4t}(1-3\cos^2\pi t) + e^{4t}(6\cos\pi t\sin\pi t \times \pi)}{4e^{4t}(1+\sin^2\pi t) + e^{4t}(2\sin\pi t\cos\pi t \times \pi)} = \frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

28. 함수

$$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)$$

와 양수 t에 대하여 점 $(s,\ f(s))\,(s>0)$에서 y축에 내린 수선의 발과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(s,\ f(s))$에서의 접선이 y축과 만나는 점 사이의 거리가 t가 되도록 하는 s의 값을 $g(t)$라 하자. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)\,dt$의 값은? [4점]

① $\frac{161}{12}+\ln 3$ ② $\frac{40}{3}+\ln 3$ ③ $\frac{53}{4}+\ln 2$

④ $\frac{79}{6}+\ln 2$ ⑤ $\frac{157}{12}+\ln 2$

$(0,\ f(x)),\ (0,\ f(s)-sf'(s))$
$t=|sf'(s)|=s|f'(s)|$

$$f'(x)=x-1+\frac{1}{1+x}=\frac{x^2}{x+1}$$

$$t=\frac{s^3}{s+1}$$

$$h(t)=\frac{t^3}{t+1},\ g(h(t))=t$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{27}{4}} g(t)dt=\int_1^3 th'(t)dt=[th(t)]_1^3-\int_1^3 h(t)dt$$

$$=\frac{79}{4}-\int_1^3\frac{t^3}{t+1}dt=\frac{79}{4}-\int_1^3\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\frac{79}{4}-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+t-\ln|t+1|\right]_1^3=\frac{79}{4}-\left(\frac{20}{3}-\ln 2\right)=\frac{157}{12}+\ln 2$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

29. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

어떤 자연수 k에 대하여 $$b_{k+i}=\frac{1}{a_i}-1 \ (i=1,\ 2,\ 3)$$ 이다.

부등식

$$0<\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n-\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)<30$$

이 성립할 때, $a_2\times\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $a_1\neq 0$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

$$a_n = nd$$

$$b_{k+1} = \frac{1}{d} - 1,\ b_{k+2} = \frac{1}{2d} - 1,\ b_{k+3} = \frac{1}{3d} - 1$$

$$\frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{b_{k+3}}{b_{k+2}},\ \frac{\frac{1}{2d} - 1}{\frac{1}{d} - 1} = \frac{\frac{1}{3d} - 1}{\frac{1}{2d} - 1},\ d = \frac{1}{4},\ \frac{b_{k+2}}{b_{k+1}} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{n}{4},\ b_n = b_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_{k+1} = 3,\ b_1 = 3^{k+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right) = \frac{3^{k+1}}{1 - \frac{1}{3}} - 16 = \frac{3^{k+2}}{2} - 16$$

$$0 < \frac{3^{k+2}}{2} - 16 < 30$$

$$32 < 3^{k+2} < 92,\ k = 2,\ b_n = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_2 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{9}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{81}{16}$$

$$p + q = 97$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.

30. 실수 전체의 집합에서 증가하는 연속함수 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

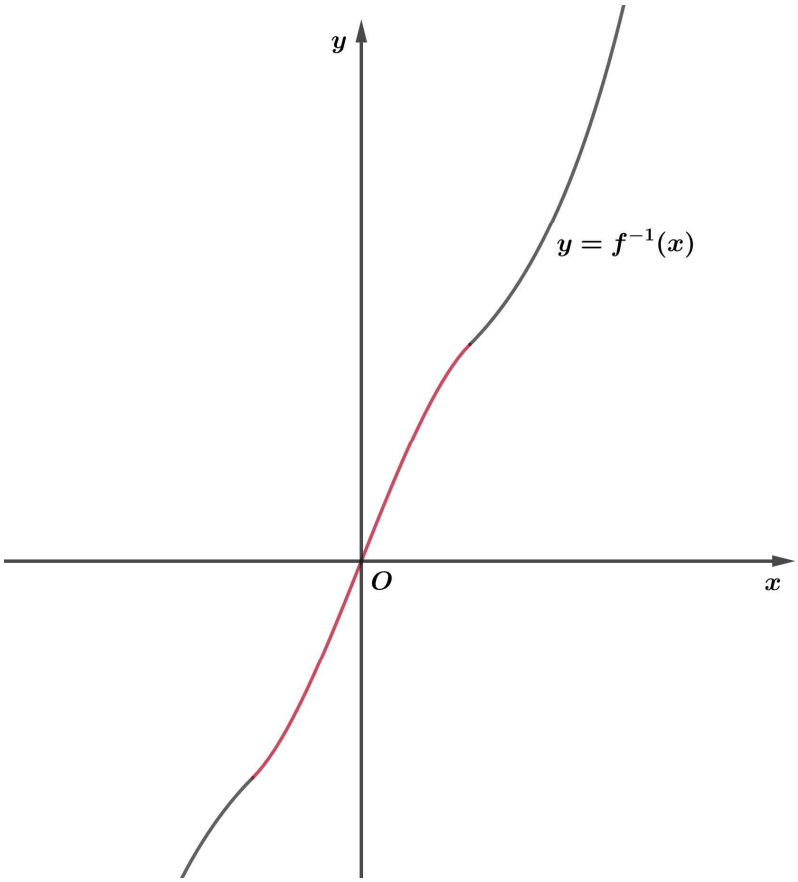
(가) $\lvert x\rvert \le 1$일 때, $4\times\left(f^{-1}(x)\right)^2 = x^2\left(x^2-5\right)^2$이다.
(나) $\lvert x\rvert > 1$일 때, $\left\lvert f^{-1}(x)\right\rvert = e^{\lvert x\rvert-1}+1$이다.

실수 m에 대하여 기울기가 m이고 점 $(1, 0)$을 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(m)$이라 하자.
함수 $g(m)$이 $m=a$, $m=b\,(a<b)$에서 불연속일 때,
$g(a)\times\left(\lim\limits_{m\to a+} g(m)\right)+g(b)\times\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2$의 값을 구하시오.
(단, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$) [4점]

$$f^{-1}(x)=h(x)=\begin{cases} -e^{-x-1}-1 & (x<-1) \\ -\dfrac{1}{2}x\left(x^2-5\right) & (-1\le x\le 1) \\ e^{x-1}+1 & (x>1) \end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases} e^{-x-1} & (x<-1) \\ -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}x^2-5\right) & (-1\le x\le 1) \\ e^{x-1} & (x>1) \end{cases}$$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.



$a=0,\ g(a)=1,\ \lim_{m\to a+} g(m)=3$

$\dfrac{-e^{-t-1}-1-1}{t}=e^{-t-1}=\dfrac{1}{b},\ e^{2b}=\dfrac{1}{b}$

$g(b)=2,\ 2b+\ln b=0,\ \dfrac{\ln b}{b}=-2$

$g(a)\times\left(\lim_{m\to a+} g(m)\right)+g(b)\times\left(\dfrac{\ln b}{b}\right)^2=3+2\times 4=11$

이 해설지에 관한 저작권은 도곡동 막샘에게 있습니다.