

수열 고난도

2025 기출 문제

120. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_2 = -a_1$ 이고, $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n} \text{이 자연수이고 } a_n > 0 \text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases} \text{를 만족시킨다. } a_{15} = 1 \text{이 되도록 하는 모든 } a_1 \text{의 값의 곱을 구하시오.}$$

$n = 4, n = 9$ 일 때 주의 하면 된다.

$$a_{10} = -4$$

$$a_2 = a \text{라 하면 } a_4 = a + 2$$

	a_5	a_9		a_{10}
$a + 2 > 0$	$a_4 - 2a_2 = 2 - a$	$6 - a$	$6 - a > 0$	$a_9 - 3a_3 = 3 - 4a$
			$6 - a \leq 0$	$7 - a$
$a + 2 \leq 0$	$a + 3$	$a + 7$	$a + 7 > 0$	$a_9 - 3a_3 = 4 - 2a$
			$a + 7 \leq 0$	$a + 8$

$$1) 3 - 4a = -4, a = \frac{7}{4}$$

$$2) 7 - a = -4, a = 11$$

$$3) 4 - 2a = -4, a = 4$$

$a + 2 \leq 0$ 여야 하므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$$4) a + 8 = -4, a = -12$$

$$a_1 = 12 \text{ or } -11 \text{ or } -\frac{7}{4}$$

$$12 \times 11 \times \frac{7}{4} = 231$$

121. 양수 k 에 대하여 $a_1 = k$ 인 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$ 이다.

$a_5 = 0$ 이 되도록 하는 서로 다른 모든 양

수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합을 구하시오.

$$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k \text{ or } a_{n+1} = -ka_n$$

a_5	a_4	a_3	a_2
0	0	0	
		$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$
			$\frac{4}{3}k$

$a_3 = 0$ 이면 $a_2 \times a_3 = 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2 = -\frac{2}{3}$ 인 경우

$$a_2 = -\frac{2}{3} = -k^2, k^2 = \frac{2}{3}$$

$a_2 = -\frac{2}{3} = \frac{1}{3}k, k = -2$ 는 k 가 양수이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2 = \frac{4}{3}k$ 이면 $a_2 \times a_3 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

a_5	a_4	a_3	a_2
0	$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3k}$
			$-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k$
		$\frac{4}{3}k$	$-\frac{4}{3}$
			$2k$

$a_2 = \frac{2}{3k}, a_2 = \frac{2}{3k} = -k^2$ 이면 $k < 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$$a_2 = \frac{2}{3k} = \frac{1}{3}k, k^2 = 2$$

$a_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = -k^2$ 이면 $a_2 \times a_3 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$$a_2 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}k = \frac{1}{3}k, k = 2$$

$$a_2 = -\frac{4}{3} = -k^2, k^2 = \frac{4}{3}$$

$$a_2 = -\frac{4}{3} = \frac{1}{3}k, k = -4 < 0 \text{ 문제의 조건에 맞지 않다.}$$

나머지 경우는 $a_2 \times a_3 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2^2 + 2 = 8$$

122. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_1|$ 의 값의

(가) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (|a_n| \text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } |a_n| \text{이 짝수}) \end{cases}$$

 (나) $|a_m| = |a_{m+2}|$ 인 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

합을 구하시오.

$$|a_3| = |a_5|$$

$$a_3 = 4k, a_5 = k, k = 0$$

$$a_2 = 3, a_1 = 6$$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	0	
			3	6

$a_2 = 0$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 2이다.

$$a_3 = 2k, a_4 = k, a_5 = k - 3 \text{ (단, } k \text{는 홀수)}$$

$$a_3 = 2k, a_4 = k, a_5 = k - 3$$

$$|2k| = |k - 3|, k = -3 \text{ or } 1$$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-6	-3	-6	-12	-24
			-12	-9
			-3	
-2	1	2	4	8
				7
			5	10

$a_2 = -3$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 2이다.

$$a_3 = k (\text{단, } k \text{는 홀수})$$

$$a_3 = k, a_4 = k - 3, a_5 = \frac{k - 3}{2}$$

$$|k| = \left| \frac{k - 3}{2} \right|, k = -3 \text{ or } 1$$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-3	-6	-3	-6	
-1	-2	1	2	

위의 경우 모두 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 2이다.

123. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값을 합을 구하시오.

$$a_1 = k \text{이고, 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \leq 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases} \text{이다.}$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$			

$k = 2$ 이면 $a_3 = 0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k = 1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	-2	1	-6	1	-10

$$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$$

$k \geq 3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$		

$k = 4$ 이면 $a_3 = 0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k = 3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
3	-2	-1	2	-9	-2

$k \geq 5$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$	$16-3k$	

$$k = 5$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
5	-2	-3	-2	1	$a_6 < 0$

$$k \geq 6$$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2 - k$	$8 - 2k$	$16 - 3k$	$26 - 4k$

$$a_6 > 0, 26 - 4k > 0, k < \frac{13}{2}$$

$$k = 6$$

$k \geq 7$ 이면 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

124. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases} \text{를 만족시킬 때, } a_2 + a_4 = 40 \text{이 되도록 하는 모}$$

든 a_1 의 값의 합을 구하시오.

$$a_2 = 4k, a_3 = 2k, a_4 = k$$

$$5k = 40, k = 8, a_1 = 31$$

$$a_2 = 32, a_1 = 64 \text{ or } 31$$

$$a_2 = 2k (\text{단, } k \text{는 홀수}), a_3 = k, a_4 = k + 1$$

$$3k + 1 = 40, k = 13$$

$$a_2 = 26, a_1 = 52 \text{ or } 25$$

$$a_2 = k (\text{단, } k \text{는 홀수}), a_3 = k + 1, a_4 = \frac{k+1}{2}$$

$$k + \frac{k+1}{2} = 40, \text{ 자연수 } k \text{는 존재하지 않는다.}$$

$$31 + 25 + 64 + 52 = 172$$

125. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} 2^{a_n} & (a_n \text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{이 짝수인 경우}) \end{cases} \text{를 만족시킬 때, } a_6 + a_7 = 3 \text{이 되도록 하는 모든}$$

a_1 의 값의 합을 구하시오.

$$a_6 \text{이 짝수이면, } a_7 = \frac{1}{2}a_6, a_6 = 2$$

$$a_6 \text{이 홀수이면, } a_7 = 2^{a_6}, a_6 = 1$$

1) $a_6 = 1$ 인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
32	16	8	4	2	1
6	3				
8	4	2	1		
2	1				

2) $a_6 = 2$ 인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
64	32	16	8	4	2
5					
12	6	3			
16	8	4	2	1	
3					
4	2	1			
1					

153

126. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합을 구하시오.

$$a_1 = 0 \text{이고 모든 자연수 } n \text{에 대하여}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases} \text{이다.}$$

$$a_2 = \frac{1}{k+1} > 0$$

$$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < 0$$

$$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \begin{cases} 0 & (k=1) \\ \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} > 0 & (k \neq 1) \end{cases}$$

$$k=1 \text{이면 } a_{22} = 0$$

$$a_5 = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} < 0$$

$$a_6 = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k}$$

$$= \begin{cases} 0 & (k=2) \\ \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} > 0 & (k \neq 1, k \neq 2) \end{cases}$$

$$k=2 \text{ 이면 } a_{22} \neq 0$$

$$a_7 = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k} < 0$$

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \begin{cases} 0 & (k=3) \\ \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} & (k \neq 1, 2, 3) \end{cases}$$

$$k=3 \text{ 이면 } a_{22} = 0$$

• • •

$$\therefore k=1, 3, 10 \text{ 일 때, } a_{22} = 0$$

127. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k 에 대하여 $a_{4k} = r^k$ 이다.

(단, r 는 $0 < |r| < 1$ 인 상수이다.)

(나) $a_1 < 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (|a_n| < 5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n| \geq 5) \end{cases} \text{이다.}$$

$|a_m| \geq 5$ 를 만족시키는 100이하의 자연수 m 의 개수를 p 라 할 때, $p + a_1$ 의 값을 구하시오.

$$a_4 = r, a_8 = r^2 \quad 0 < |r| < 1$$

$$a_5 = r + 3, a_6 = r + 6, a_7 = -\frac{1}{2}r - 3,$$

$$a_8 = -\frac{1}{2}r = r^2$$

$$r = -\frac{1}{2} = a_4, a_3 = -\frac{7}{2}, a_2 = 7, a_1 = -14$$

$$a_5 = \frac{5}{2}, a_6 = \frac{11}{2}, a_7 = -\frac{11}{4}, a_8 = \frac{1}{4}$$

$$a_9 = \frac{13}{4}, a_{10} = \frac{25}{4}, a_{11} = -\frac{25}{8}, a_{12} = -\frac{1}{8}$$

$$\therefore p = 26, a_1 = -14$$

128. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.

(가) $a_7 = 40$ 이다.

(나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3} a_{n+1} & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases} \text{이다.}$$

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
		120	40	160	200
	$3a$	a	$a = 10$		
	30	10	40	50	90
$3a$	a	$4a$	$a = 8$		
		32	40	72	24

a_4 가 3의 배수이면 a_8 이 3의 배수

a_5 가 3의 배수이면 a_9 이 3의 배수

a_3 이 3의 배수이면 a_7 이 3의 배수인데 $a_7 = 40$ 이므로 a_3 이 3의 배수이면서 문제의 조건에 맞는 경우는 존재하지 않는다.

a_2 이 3의 배수이면 a_6 이 3의 배수이고 이 경우는 첫 번째에 계산 했으므로 더 이상 계산하지 않아도 된다.

$$\therefore a_9 = 200 \text{ or } 90 \text{ or } 24$$

129. 수열 $\{a_n\}$ 은 $|a_1| \leq 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases} \text{을 만족시킨다. } a_5 + a_6 = 0 \text{이고 } \sum_{k=1}^5 a_k > 0 \text{이}$$

되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$$-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2} \quad \text{는 가정에 모순}$$

$$a_6 = -2a_5 - 2, a_5 + a_6 = -a_5 - 2 = 0, a_5 = -2$$

$$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2}$$

$$a_6 = 2a_5, a_5 + a_6 = 3a_5 = 0, a_5 = 0$$

$$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1 \quad \text{는 가정에 모순}$$

$$a_6 = -2a_5 + 2, a_5 + a_6 = -a_5 + 2 = 0, a_5 = 2$$

$$a_5 = 0, a_4 = -1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$$

$$a_4 = -1 \text{ 이면 } a_3 < 0, a_2 < 0, a_1 < 0 \text{이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.}$$

$$a_4 = 0, a_3 = 0, 1(a_3 = -1 \text{ 이면 } \sum_{k=1}^5 a_k < 0)$$

$$a_3 = 0, a_2 = 0, a_1 = 1$$

$$a_3 = 0, a_2 = 1, a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{1}{4} \text{ or } \frac{3}{4}$$

$$a_4 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{4} \text{ or } \frac{3}{4},$$

$$a_1 = \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 = \frac{9}{2}$$

다음과 같은 함수의 그래프를 이용해서 풀 수도 있다.

