미적분 고난도 문제

수학 영역

제 2 교시

1. $t>2e$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}=\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

$f'(x)=\dfrac{2t\ln x}{x}-2x$

$\dfrac{2t\ln k}{k}-2k=0$

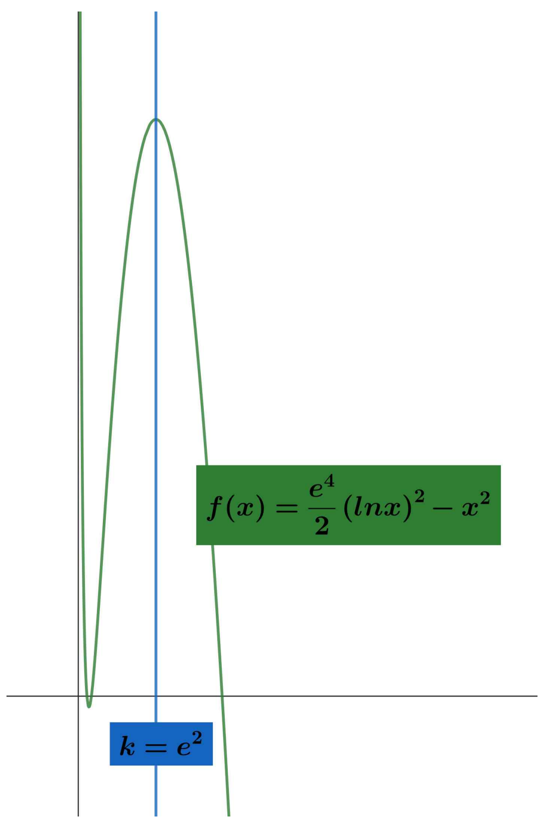
$2t\ln g(t)=2(g(t))^2$

$2\alpha\ln g(\alpha)=2(g(\alpha))^2,\ \alpha=\dfrac{e^4}{2}$

$2\ln g(t)+\dfrac{2tg'(t)}{g(t)}=4g(t)g'(t)$

$4+e^2g'(\alpha)=4e^2g'(\alpha),\ g'(\alpha)=\dfrac{4}{3e^2}$

$\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\dfrac{8}{9}$



*2.*함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)=-\dfrac{q}{p}\sqrt{e}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$\dfrac{1-\ln g(t)}{(g(t))^2}=t$

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a 이므로

$a=\dfrac{1-\ln g(a)}{(g(a))^2}=\dfrac{\ln g(a)}{(g(a))^2}$

$g(a)=\sqrt{e},\ a=\dfrac{1}{2e}$

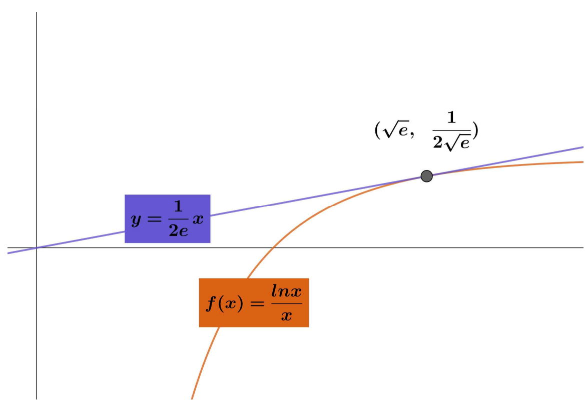
$\dfrac{1-\ln g(t)}{(g(t))^2}=t$

$1-\ln g(t)=t(g(t))^2$

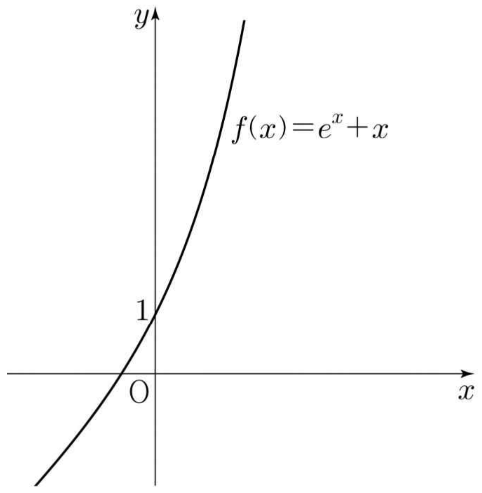
$-\dfrac{g'(t)}{g(t)}=(g(t))^2+2tg(t)g'(t)$

$-\dfrac{g'(a)}{\sqrt{e}}=e+\dfrac{\sqrt{e}}{e}g'(a)\quad g'(a)=-\dfrac{e\sqrt{e}}{2}$.

$\therefore\ a\times g'(a)=-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$



3.함수 $f(x)=e^{x}+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오.



$\frac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1, f(s)=g(t), t=h(f(s))$

$\frac{f(s)}{s-h(f(s))}\times f'(s)=-1$

$f(s)f'(s)=h(f(s))-s$

$(e^{s}+s)(e^{s}+1)=h(e^{s}+s)-s$

$(e^{s}+1)^{2}+(e^{s}+s)e^{s}$
$=h'(e^{s}+s)\times(e^{s}+1)-1$

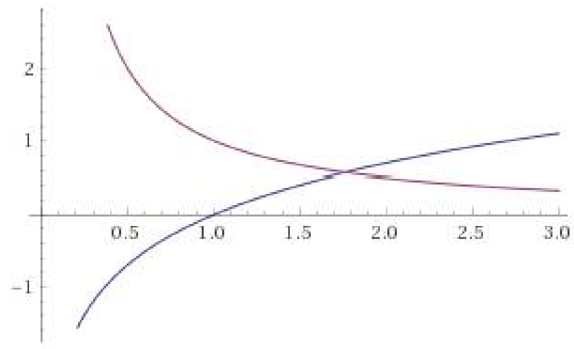
$5=h'(1)\times 2-1$
$h'(1)=3$

4.양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^{3}\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^{2}$의 값을 구하시오.

$y=t^{3}\ln(x-t)$, $y=2e^{x-a}$가 한 점에서 만날 때 그 점의 x좌표를 α라 하면,

$\begin{cases} t^{3}\ln(\alpha-t)=2e^{\alpha-f(t)} \\ \frac{t^{3}}{\alpha-t}=2e^{\alpha-f(t)} \end{cases}$ 를 만족한다.

$\ln(\alpha-t)=\frac{1}{\alpha-t}$에서 $\alpha-t=k$라 하면 $\ln k=\frac{1}{k}$이므로 k는 연립방정식 $\begin{cases} y=\ln x \\ y=\frac{1}{x} \end{cases}$ 의 해이고 상수임을 알 수 있다.



$\therefore\ \alpha=t+k$(단, k는 상수)

$\frac{t^{3}}{k}=2e^{t+k-f(t)}$ 의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\frac{3t^{2}}{k}=2e^{t+k-f(t)}\times(1-f'(t))$

$\frac{3t^{2}}{k}=\frac{t^{3}}{k}\times(1-f'(t))$

$\therefore\ f'(t)=1-\frac{3}{t}$ 이고

$\therefore\ \left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^{2}=(-8)^{2}=64$

5. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)=-\frac{q}{p}e\sqrt{e}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

접점의 x좌표를 α라 하면

$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{e^\alpha}+e^t\right)=-\frac{1}{e^\alpha}=f(t)$,

$f(a)=-e\sqrt{e}=-\frac{1}{e^\alpha}$, $\alpha=-\frac{3}{2}$

$-f(t)+e^t=-f(t)\ln(-f(t))$

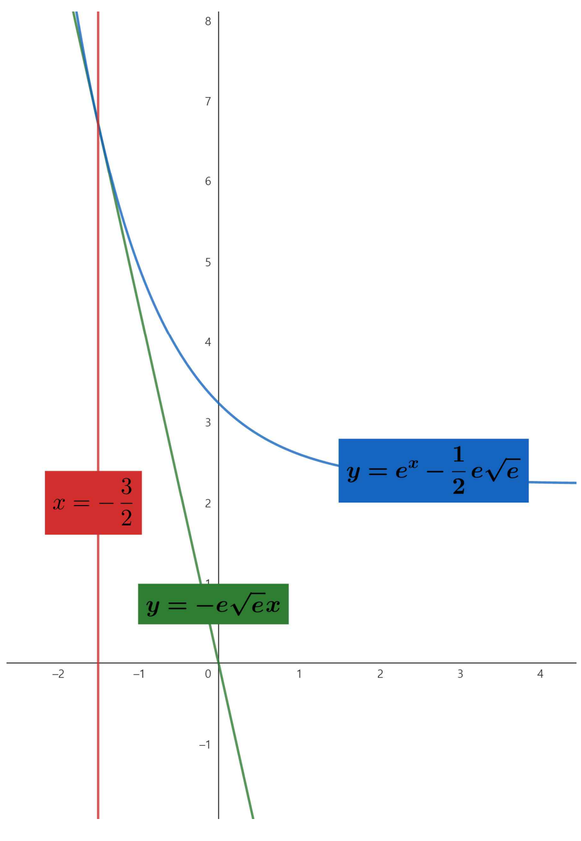
$-f'(t)+e^t$
$=-f'(t)\ln(-f(t))-f(t)\times\frac{-f'(t)}{-f(t)}$

$f'(t)=-\frac{e^t}{\ln(-f(t))}$

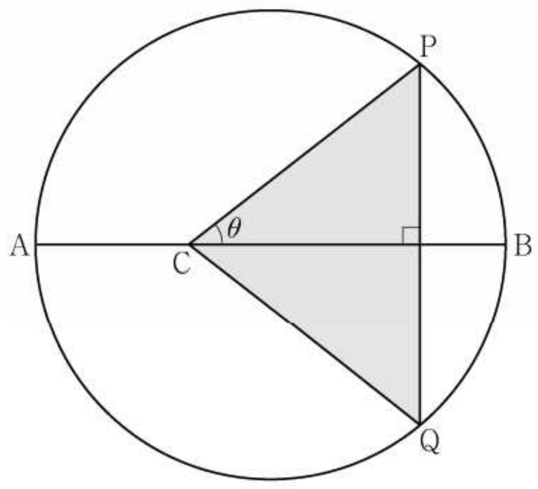
$f'(a)=-\frac{e^a}{\ln(-f(a))}$

$f(a)=-\frac{2}{3}(e\sqrt{e}+e^a)=-e\sqrt{e}$, $e^a=\frac{1}{2}e\sqrt{e}$

$f'(a)=-\frac{\frac{1}{2}e\sqrt{e}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$



6. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



선분 AB와 선분 PQ가 만나는 점을 H라 하고
$\overline{CH}=x$라 하면
$S(\theta)=x^2\tan\theta$

$(x-1)^2+(x\tan\theta)^2=25$
$S'(\theta)=2xx'\tan\theta+x^2\sec^2\theta$

$\theta=\frac{\pi}{4}$, $(x-1)^2+x^2=25$, $x=4$

$2(x-1)x'+2(x\tan\theta)(x'\tan\theta+x\sec^2\theta)=0$
$x'=-\frac{32}{7}$

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8\left(-\frac{32}{7}\right)+16\times 2$

$-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=32$