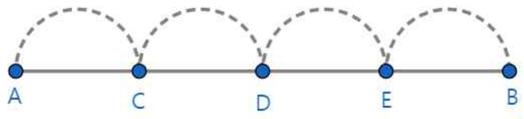
#1 수직선 위의 선분의 내분점



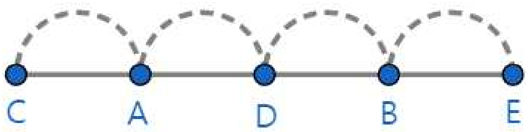
$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EB}$이면

$\overline{AC}:\overline{CB}=1:3$ 이므로 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.

$\overline{AE}:\overline{EB}=3:1$ 이므로 점 E는 선분 AB를 $3:1$로 내분한다.

$\overline{AD}:\overline{DB}=2:2=1:1$ 이므로 점 D는 선분 AB를 $1:1$로 내분한다. 즉, 점 D는 선분 AB의 중점이다.

#2 수직선 위의 선분의 외분점

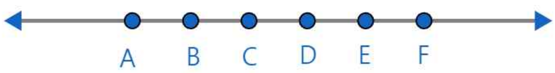


$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EB}$이면

$\overline{CA}:\overline{CB}=1:3$ 이므로 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 외분한다.

$\overline{AE}:\overline{BE}=3:1$ 이므로 점 E는 선분 AB를 $3:1$로 외분한다.

1. 그림과 같이 수직선 위에 일정한 간격으로 점 A, B, C, D, E, F, B, C, D, E, F가 있을 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 두 점 A, F 를 $1:4$으로 내분하는 점
B

(2) 두 점 A, F 를 $2:3$으로 내분하는 점
C

(3) 두 점 A, F 를 $3:2$으로 내분하는 점
D

(4) 두 점 B, D 의 중점
C

(5) 두 점 A, E 의 중점
C

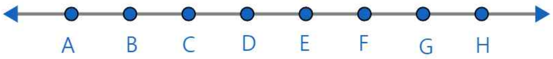
(6) 두 점 A, B 를 $2:1$으로 외분하는 점
C

(7) 두 점 A, B 를 $3:2$으로 외분하는 점
D

(8) 두 점 C, D 를 $1:2$으로 외분하는 점
B

(9) 두 점 C, D 를 $2:3$으로 외분하는 점
A

2. 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르시오.



<보기>

ㄱ. 점 D는 선분 AQ의 중점

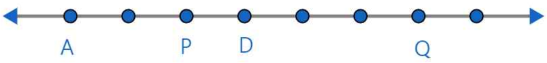
ㄴ. 점 D는 선분 PQ를 $1:3$으로 내분

ㄷ. 점 A는 선분 PQ를 $1:3$으로 외분하는 점

ㄹ. 점 A는 선분 DQ를 $1:2$로 외분하는 점

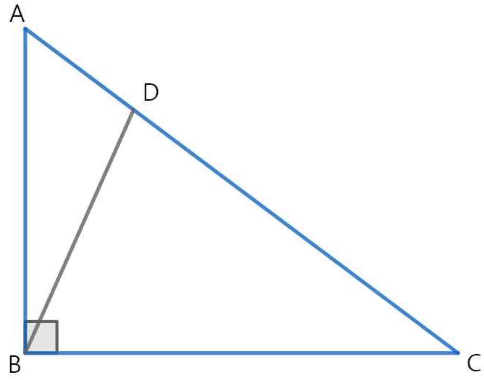
ㅁ. 점 Q는 선분 PD를 $4:3$으로 외분하는 점

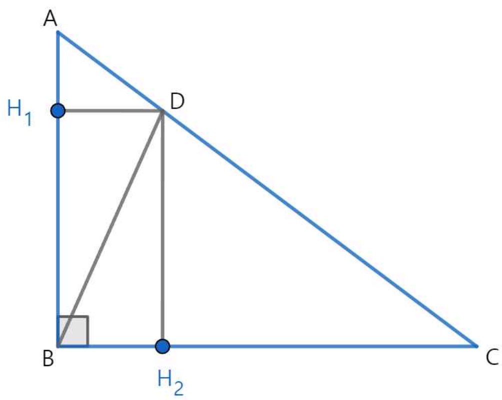
점 A, P, D, Q의 위치관계는
다음과 같으므로



옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ

3. $\angle B = 90^\circ$ 이고, $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 16$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D가 선분 AC를 $1:3$으로 내분할 때, 선분 BD의 길이를 구하시오.

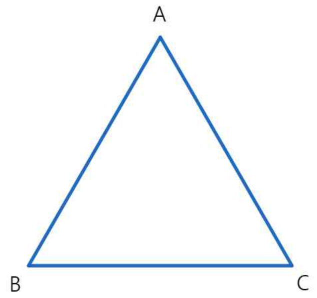


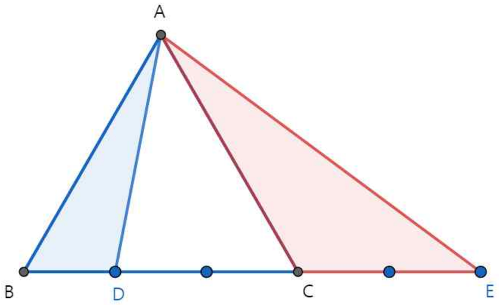


$\overline{BH_1} = \frac{3}{4} \times 12 = 9$, $\overline{BH_2} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$

$\overline{BD} = \sqrt{81+16} = \sqrt{97}$

4. 그림과 같이 넓이가 $4\sqrt{3}$인 삼각형 ABC에 서대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $5:2$으로 외분하는 점을 E라 하자. 삼각형 ABD의 넓이와 삼각형 ACE의 넓이의 합을 구하시오.



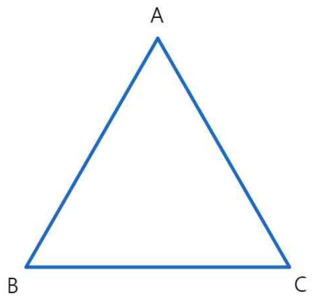


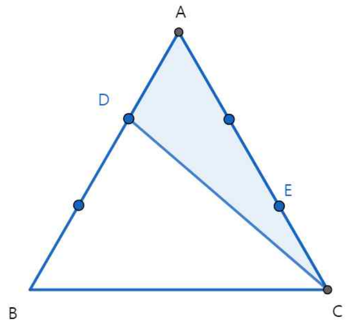
$\triangle ABD$ $\frac{1}{3}\times 4\sqrt{3}$

$\triangle ACE$ $\frac{2}{3}\times 4\sqrt{3}$

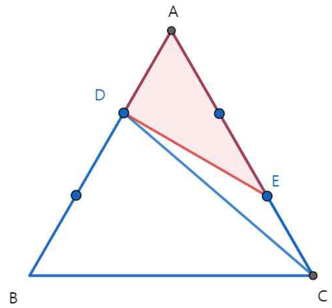
$4\sqrt{3}$

5. 넓이가 $4\sqrt{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$으로 내분하는 점을 E라 하자. 삼각형 ADE의 넓이를 구하시오.



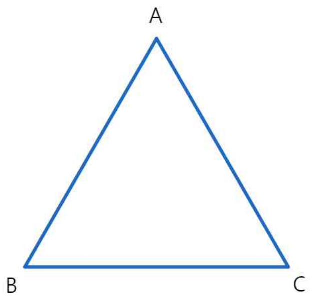


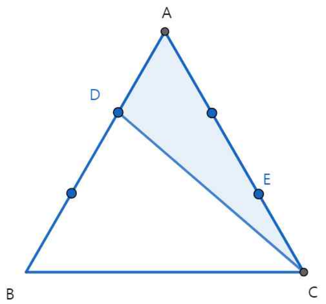
삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이고



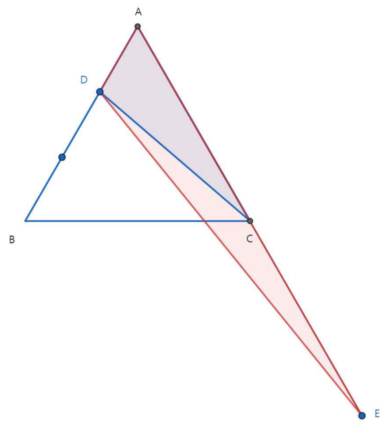
삼각형 ADE의 넓이는 삼각형 ADC의 넓이의 $\frac{2}{3}$이므로 삼각형 ADE의 넓이는 삼각형 ABC넓이의 $\frac{2}{9}$이다. $\frac{8\sqrt{3}}{9}$

6. 넓이가 $4\sqrt{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$으로 외분하는 점을 E라 하자. 삼각형 ADE의 넓이를 구하시오.





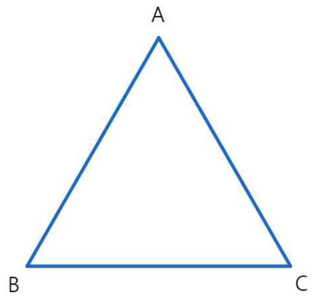
삼각형 ADC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이고

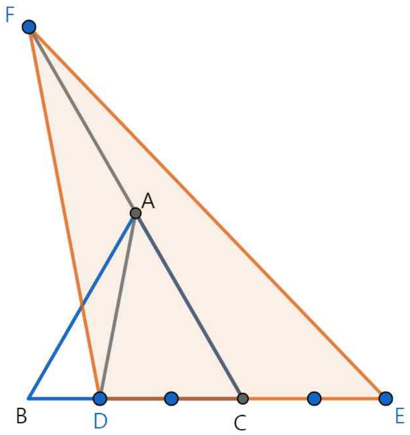


$\overline{AC}=\overline{CE}$이므로 삼각형 ADE의 넓이는 삼각형 ADC의 넓이의 2배이므로 삼각형 ADE의 넓이는 삼각형 ABC넓이의 $\frac{2}{3}$이다.

$\frac{8\sqrt{3}}{3}$

7. 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $5:2$로 외분하는 점을 E선분 AC를 $1:2$으로 외분하는 점을 F라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 S일 때, 삼각형 DEF의 넓이는 kS이다. 실수 k의 값을 구하시오.





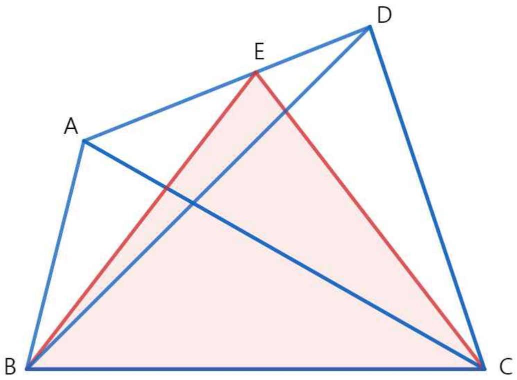
$\triangle ADC=\frac{2}{3}S$

$\triangle FDC=\frac{4}{3}S$

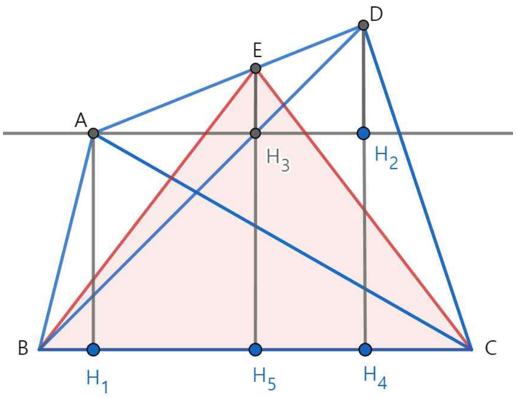
$\triangle DEF=\frac{8}{3}S$

$k=\frac{8}{3}$

8. 그림과 같이 사각형 $ABCD$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이는 8이고 삼각형 DBC의 넓이는 12이다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 E라 할 때, 삼각형 EBC의 넓이를 구하시오.



$\triangle ABC, \triangle DBC, \triangle EBC$ 모두 밑변이 같다.
높이비만 계산하면 넓이비가 된다.



$\overline{AH_1} : \overline{DH_4} = 2:3$

$\overline{AH_1} : \overline{DH_2} = 2:1$

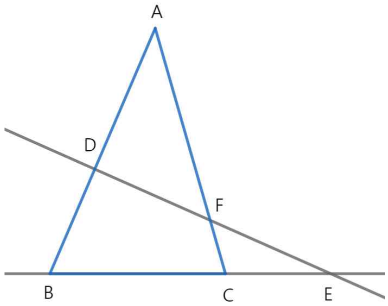
$\overline{EH_3} : \overline{DH_2} = 3:5$

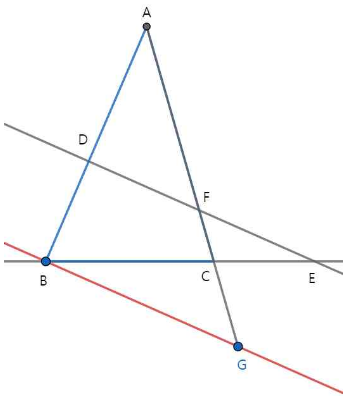
$\overline{EH_3} = \frac{3}{10}\overline{AH_1}$

$\overline{EH_5} = \frac{13}{10}\overline{AH_1}$

$\triangle EBC = \frac{13}{10}\triangle ABC = \frac{52}{5}$

9. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB를 $4:3$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $8:3$으로 외분하는 점을 E라 하자. 두 점 D와 E를 지나는 직선과 선분 AC가 만나는 점을 F라 할 때, $\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)





점 B를 지나고 직선 DE와 평행한 직선을 그리고 선분 AC의 연장선과 만나는 점을 G라 하면 삼각형 닮음에 의해 $\overline{FC} : \overline{CG} = 3:5$, $\overline{FC} = 3k$라 하면
삼각형 닮음에 의해

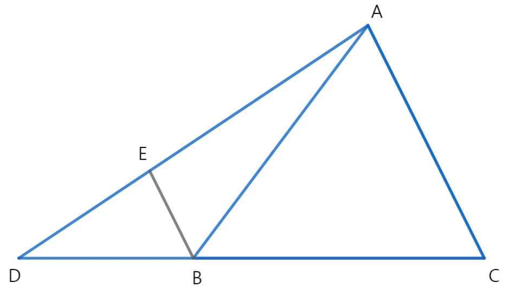
$\overline{AF} : \overline{FG} = \overline{AF} : 8k = 4:3$

$\overline{AF} = \frac{32k}{3}$

$\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}} = \frac{32}{9}$

$p+q=41$

10. 넓이가 40이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:8$로 외분하는 점을 D, 각 ABD의 이등분선과 선분 AD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 EDB의 넓이와 삼각형 AEC의 넓이의 합을 구하시오.



$\overline{DB}:\overline{BC}=3:5$

$\overline{AB}:\overline{BD}=5:3$

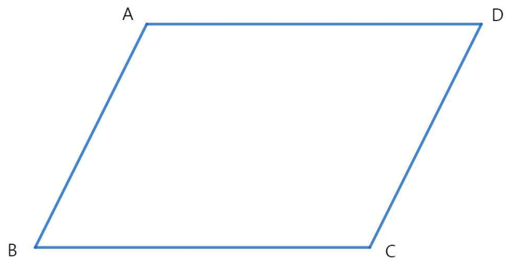
$\overline{AE}:\overline{ED}=5:3$

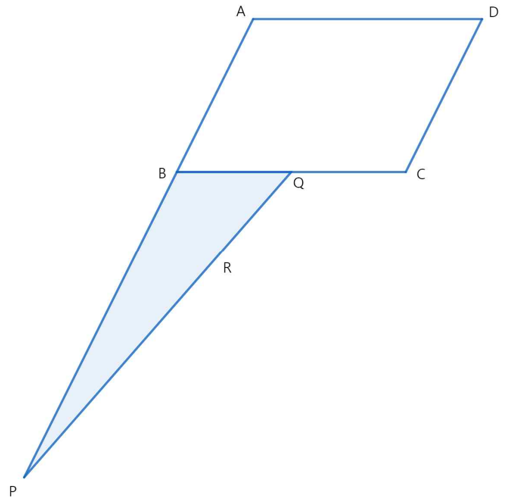
$\triangle ABC=5S=40$ 라 하면
$\triangle ABD=3S,\ \triangle ADC=8S$
삼각형 DBE와 DCA는 닮은 삼각형이고 길이비가 $3:8$이므로 넓이비는 $9:64$이므로
$\triangle DBE=\dfrac{9}{64}\times 8S=\dfrac{9}{8}S=9$

$\triangle AEC=\dfrac{5}{8}\times 8S=5S=40$

49

11. 넓이가 60인 평행사변형 $ABCD$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점을 R라 할 때, 삼각형 BPR의 넓이를 구하시오



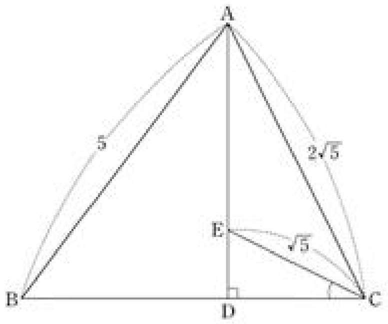


$\overline{BP}=2\overline{AB},\ \overline{BQ}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$

$\triangle BPQ=2\times\dfrac{1}{4}\times 60=30$

$\triangle BPR=\dfrac{2}{3}\triangle BPQ=20$

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 구하시오.



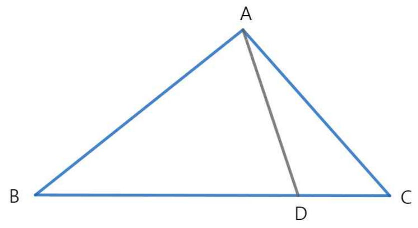
선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점이 점 E 이므로 $\overline{DE}=a$, $\overline{AE}=3a$라 하면

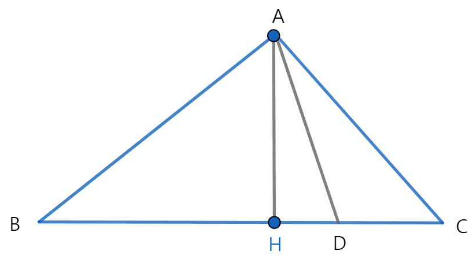
$\overline{CD}^2=(2\sqrt{5})^2-(4a)^2=(\sqrt{5})^2-a^2$ 을 만족시키므로 $a=1$

$\overline{BD}=3$, $\overline{CD}=2$

$\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$

13. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=5$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점 D에 대하여 $\overline{AD}=4$일 때, $\overline{BC}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)





$\overline{CD}=x$, $\overline{DH}=y$

$\overline{AH}^2=36-(3x-y)^2=25-(x+y)^2=16-y^2$

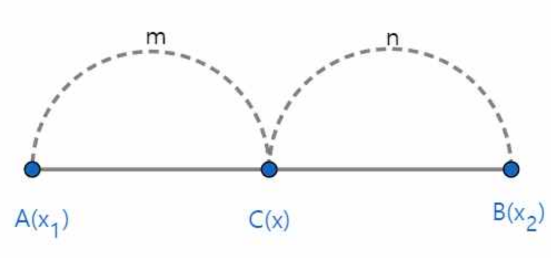
$x^2=\frac{47}{12}$

$16x^2=\frac{188}{3}$

191

** 파푸스 중선 정리를 이용하여 풀어도 됩니다.

#3 수직선 위의 선분의 내분, 외분 공식 증명



◈ 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 C라 하면 (단, $m>0, n>0$)

$\overline{AC}=x-x_1$, $\overline{BC}=x_2-x$ 이므로

$x-x_1 : x_2-x = m : n$
$m(x_2-x)=n(x-x_1)$

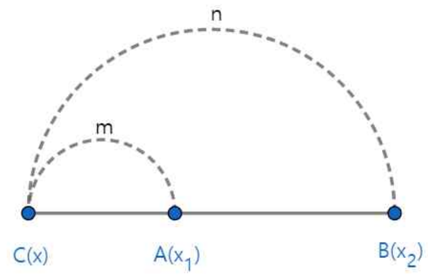
$(m+n)x=mx_2+nx_1$

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

◈ 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점이므로

$$M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

#4 수직선 위의 선분의 외분 공식 증명



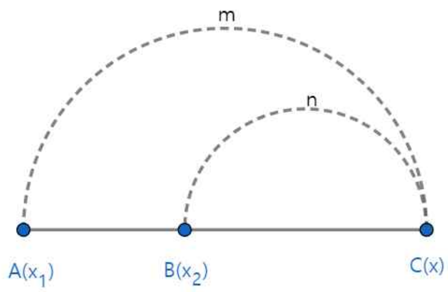
◈ 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점을 C라 하면 ($0<m<n$인 경우)

$\overline{AC}=x_1-x$, $\overline{BC}=x_2-x$ 이므로

$x_1-x : x_2-x = m : n$
$m(x_2-x)=n(x_1-x)$

$(m-n)x=mx_2-nx_1$

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$



◈ 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점을 C라 하면 ($m>n>0$인 경우)

$\overline{AC}=x-x_1$, $\overline{BC}=x-x_2$ 이므로

$x-x_1 : x-x_2 = m : n$
$m(x-x_2)=n(x-x_1)$

$(m-n)x=mx_2-nx_1$

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

14. 수직선 위의 두 점 $A(4)$, $B(12)$에 대하여 선분 AB의 중점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

$\dfrac{4+12}{2}=8$

15. 수직선 위의 두 점 $A(1)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

$\dfrac{3\times6+2\times1}{3+2}=4$

16. 수직선 위의 두 점 $A(1)$, $B(6)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

$\dfrac{3\times6-2\times1}{3-2}=16$

17. 수직선 위의 두 점 $A(1)$, $B(7)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $1:2$ 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

$\dfrac{2\times7+1\times1}{2+1}=5$, $\dfrac{1\times7-2\times1}{1-2}=-5$

$5-(-5)=10$

18. 두 점 $A(2)$, $B(9)$에 대하여 점 $P(x)$가 $4\overline{AP}=3\overline{BP}$를 만족시킬 때, 모든 x의 값의 합을 구하시오.

$4\overline{AP}=3\overline{BP}$, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:4$ 이므로

점 P는 선분 AB를 $3:4$로

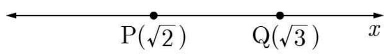
내분하는 점 또는

$3:4$로 외분하는 점이다.

$\dfrac{3\times9+4\times2}{3+4}=5$, $\dfrac{3\times9-4\times2}{3-4}=-19$

$5-19=-14$

19. 수직선 위에 두 점 $P(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$에 대하여 세 점 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $D(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$를 수직선 위에 나타낼 때, 네 점의 위치를 순서대로 나열하시오.



점 A는 선분 PQ를 $2:1$로 내분
점 B는 선분 PQ를 $1:2$로 내분
점 C는 선분 PQ를 $3:1$로 외분
점 D는 선분 PQ를 $1:2$로 외분 하므로
D, B, A, C

20. 수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)\,(a<b)$에 대하여 세 점 $P(x_1)$, $Q(x_2)$, $R(x_3)$, $S(x_4)$이 $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=\frac{4a-b}{3}$, $x_3=\frac{3a+b}{4}$, $x_4=\frac{5a-b}{4}$를 만족시킨다. 이때, x_1, x_2, x_3, x_4의 대소관계를 구하시오.

점 P는 선분 AB의 중점
점 Q는 선분 AB를 1 : 4로 외분
점 R는 선분 AB를 1 : 3로 내분
점 S는 선분 AB를 1 : 5로 외분

$x_2<x_4<x_3<x_1$

21. 길이가 10인 선분 PQ에 대하여 선분 PQ를 $m:n\,(m>n)$으로 내분하는 점을 A, $n:m$으로 내분하는 점을 B, $n:m$으로 외분하는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2$일 때, 선분 QC의 길이를 구하시오.

$P(0)$, $Q(10)$**이라 하면**
$A\left(\frac{10m}{m+n}\right)$, $B\left(\frac{10n}{m+n}\right)$, $C\left(\frac{10n}{n-m}\right)$

$\frac{10m}{m+n}-\frac{10n}{m+n}=2$, $m=\frac{3}{2}n$

$C\left(\frac{10n}{n-\frac{3}{2}n}\right)=C(-20)$

$\overline{QC}=30$

22. 그림과 같이 일직선 위의 세 지점 A, B, C에 편의점이 $2\overline{AB}=\overline{BC}$가 되도록 위치해있다. 편의점 B와 C 사이의 한 지점에 물류창고를 지으려고 한다. 물류창고에서 편의점까지의 운반비용은 물류창고에서 편의점의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반비용을 최소로 하는 물류창고의 위치는 선분 BC를 $t:1-t$로 내분하는 지점이다. t의 값을 구하시오.

$A(-a)$, $B(0)$, $C(2a)$라 하고 물류창고의 위치를 $P(x)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$ 이므로
$=(x+a)^2+x^2+(x-2a)^2$
$=3x^2-2ax+5a^2$

$x=\frac{1}{3}a$에 있을 때 거리의 제곱의 합이 최소

$\frac{1}{3}a : \frac{5}{3}a = 1 : 5$

$t=\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$