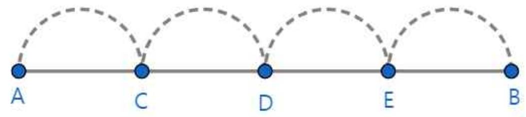
#1 수직선 위의 선분의 내분점



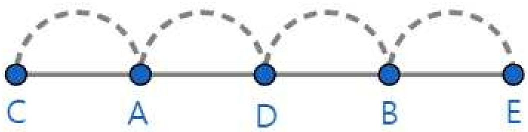
$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EB}$이면

$\overline{AC}:\overline{CB}=1:3$ 이므로 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.

$\overline{AE}:\overline{EB}=3:1$ 이므로 점 E는 선분 AB를 $3:1$로 내분한다.

$\overline{AD}:\overline{DB}=2:2=1:1$ 이므로 점 D는 선분 AB를 $1:1$로 내분한다. 즉, 점 D는 선분 AB의 중점이다.

#2 수직선 위의 선분의 외분점

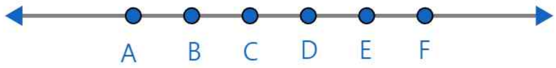


$\overline{AC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EB}$이면

$\overline{CA}:\overline{CB}=1:3$ 이므로 점 C는 선분 AB를 $1:3$으로 외분한다.

$\overline{AE}:\overline{BE}=3:1$ 이므로 점 E는 선분 AB를 $3:1$로 외분한다.

1. 그림과 같이 수직선 위에 일정한 간격으로 점 A, B, C, D, E, F가 있을 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 두 점 A, F를 $1:4$으로 내분하는 점

(2) 두 점 A, F를 $2:3$으로 내분하는 점

(3) 두 점 A, F를 $3:2$으로 내분하는 점

(4) 두 점 B, D의 중점

(5) 두 점 A, E의 중점

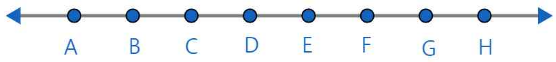
(6) 두 점 A, B를 $2:1$으로 외분하는 점

(7) 두 점 A, B를 $3:2$으로 외분하는 점

(8) 두 점 C, D를 $1:2$으로 외분하는 점

(9) 두 점 C, D를 $2:3$으로 외분하는 점

2. **선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라고 할 때, 다음 [보기]에서 옳은 것을 모두 고르시오.**



<보기>

ㄱ. 점 D는 선분 AQ의 중점

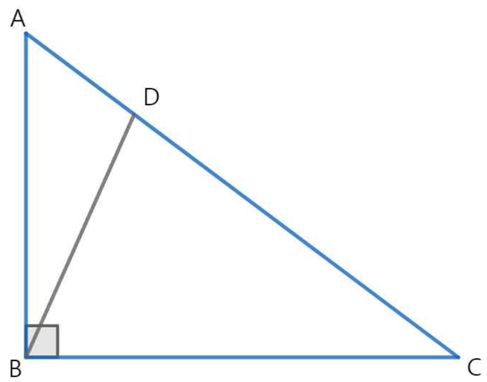
ㄴ. 점 D는 선분 PQ를 $1:3$으로 내분

ㄷ. 점 A는 선분 PQ를 $1:3$으로 외분하는 점

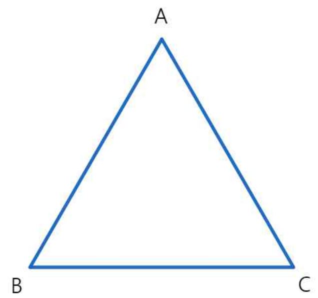
ㄹ. 점 A는 선분 DQ를 $1:2$로 외분하는 점

ㅁ. 점 Q는 선분 PD를 $4:3$으로 외분하는 점

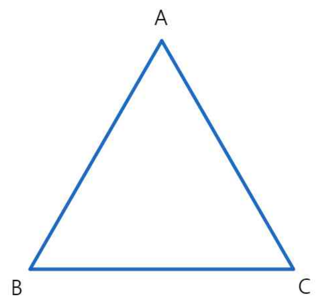
3. $\angle B = 90^\circ$ **이고,** $\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 16$**인 직각삼각형** ABC**에 대하여 점** D**가 선분** AC**를** $1:3$**으로 내분할 때, 선분** BD**의 길이를 구하시오.**



4. **그림과 같이 넓이가** $4\sqrt{3}$**인 삼각형** ABC**에 대하여 선분** BC**를** $1:2$**로 내분하는 점을** D, **선분** BC**를** $5:2$**으로 외분하는 점을** E**라 하자. 삼각형** ABD**의 넓이와 삼각형** ACE**의 넓이의 합을 구하시오.**



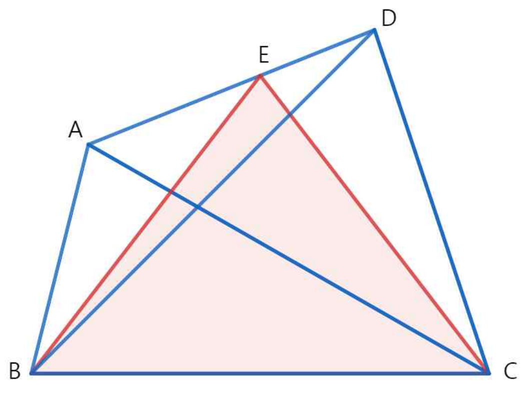
5. **넓이가** $4\sqrt{3}$**인 삼각형** ABC**에 대하여 선분** AB**를** $1:2$**로 내분하는 점을** D, **선분** AC**를** $2:1$**으로 내분하는 점을** E**라 하자. 삼각형** ADE**의 넓이를 구하시오.**



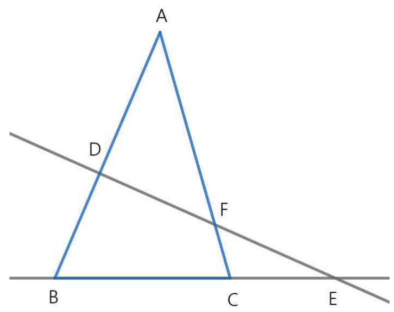
6. 넓이가 $4\sqrt{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$으로 외분하는 점을 E라 하자. 삼각형 ADE의 넓이를 구하시오.

7. 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $5:2$로 외분하는 점을 E선분 AC를 $1:3$으로 외분하는 점을 F라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 S일 때, 삼각형 DEF의 넓이는 kS이다. 실수 k의 값을 구하시오.

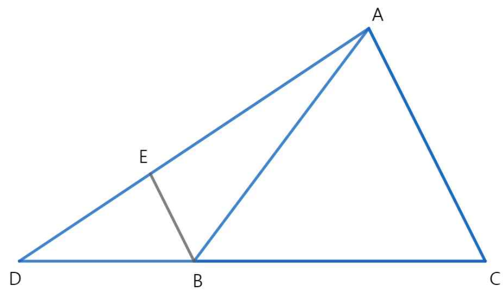
8. 그림과 같이 사각형 $ABCD$에 대하여 삼각형 ABC의 넓이는 8이고 삼각형 DBC의 넓이는 12이다. 선분 AD를 $3:2$로 내분하는 점을 E라 할 때, 삼각형 EBC의 넓이를 구하시오.



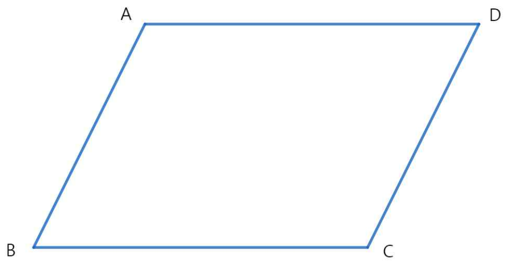
9. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB를 $4:3$로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $8:3$으로 외분하는 점을 E라 하자. 두 점 D와 E를 지나는 직선과 선분 AC가 만나는 점을 F라 할 때, $\frac{\overline{AF}}{\overline{CF}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



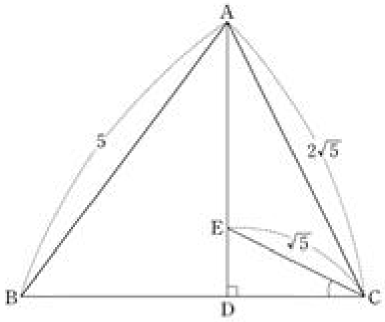
10. 넓이가 40이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 BC를 $3:8$로 외분하는 점을 D, 각 ABD의 이등분선과 선분 AD가 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 EDB의 넓이와 삼각형 AEC의 넓이의 합을 구하시오.



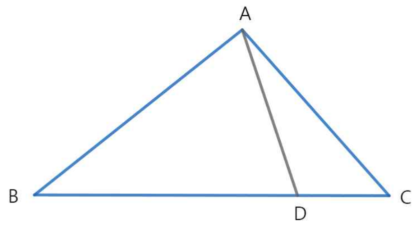
11. 넓이가 60인 평행사변형 $ABCD$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 P, 선분 BC의 중점을 Q라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점을 R라 할 때, 삼각형 BPR의 넓이를 구하시오.



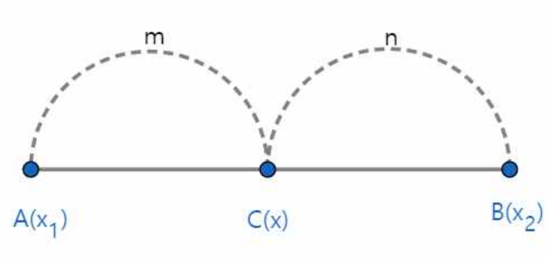
12. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 구하시오.



13. $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=5$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC를 $3:1$로 내분하는 점 D에 대하여 $\overline{AD}=4$일 때, $\overline{BC}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



#3 수직선 위의 선분의 내분, 외분 공식 증명



◈ 선분 AB를 $m : n$으로 내분하는 점을 C라 하면 (단, $m>0, n>0$)

$\overline{AC}=x-x_1$, $\overline{BC}=x_2-x$ 이므로

$$x-x_1 : x_2-x = m : n$$
$$m(x_2-x)=n(x-x_1)$$

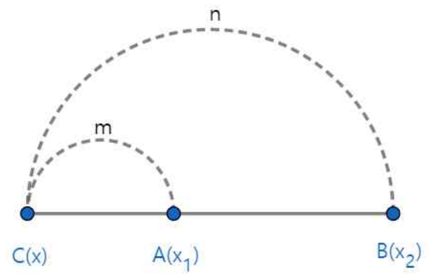
$$(m+n)x=mx_2+nx_1$$

$$x=\frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

◈ 선분 AB의 중점 M은 선분 AB를 $1 : 1$로 내분하는 점이므로

$$M=\frac{x_1+x_2}{2}$$

#4 수직선 위의 선분의 외분 공식 증명



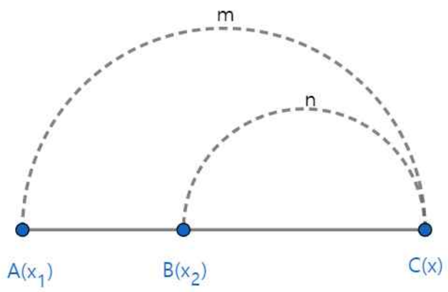
◈ 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점을 C라 하면 ($0<m<n$인 경우)

$\overline{AC}=x_1-x$, $\overline{BC}=x_2-x$ 이므로

$$x_1-x : x_2-x = m : n$$
$$m(x_2-x)=n(x_1-x)$$

$$(m-n)x=mx_2-nx_1$$

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$



◈ 선분 AB를 $m : n$으로 외분하는 점을 C라 하면 ($m>n>0$인 경우)

$\overline{AC}=x-x_1$, $\overline{BC}=x-x_2$ 이므로

$$x-x_1 : x-x_2 = m : n$$
$$m(x-x_2)=n(x-x_1)$$

$$(m-n)x=mx_2-nx_1$$

$$x=\frac{mx_2-nx_1}{m-n}$$

14. 수직선 위의 두 점 $A(4), B(12)$에 대하여 선분 AB의 중점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

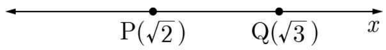
15. 수직선 위의 두 점 $A(1), B(6)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

16. 수직선 위의 두 점 $A(1), B(6)$에 대하여 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 $P(x)$라 할 때, x의 값을 구하시오.

17. 수직선 위의 두 점 $A(1), B(7)$에 대하여 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 P, $1:2$ 외분하는 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이를 구하시오.

18. 두 점 $A(2), B(9)$에 대하여 점 $P(x)$가 $4\overline{AP}=3\overline{BP}$를 만족시킬 때, 모든 x의 값의 합을 구하시오.

19. 수직선 위에 두 점 $P(\sqrt{2})$, $Q(\sqrt{3})$에 대하여 세 점 $A\left(\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3}\right)$, $B\left(\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}\right)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}\right)$, $D(2\sqrt{2}-\sqrt{3})$를 수직선 위에 나타낼 때, 네 점의 위치를 순서대로 나열하시오.



20. 수직선 위의 두 점 $A(a)$, $B(b)\,(a<b)$에 대하여 세 점 $P(x_1), Q(x_2), R(x_3), S(x_4)$이 $x_1=\dfrac{a+b}{2}$, $x_2=\dfrac{4a-b}{3}$, $x_3=\dfrac{3a+b}{4}$, $x_4=\dfrac{5a-b}{4}$를 만족시킨다. 이때, x_1, x_2, x_3, x_4의 대소관계를 구하시오.

21. 길이가 10인 선분 PQ에 대하여 선분 PQ를 $m:n\ (m>n)$으로 내분하는 점을 A, $n:m$으로 내분하는 점을 B, $n:m$으로 외분하는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2$일 때, 선분 QC의 길이를 구하시오.

22. 그림과 같이 일직선 위의 세 지점 A, B, C에 편의점이 $2\overline{AB}=\overline{BC}$가 되도록 위치해있다. 편의점 B와 C 사이의 한 지점에 물류창고를 지으려고 한다. 물류창고에서 편의점까지의 운반비용은 물류창고에서 편의점의 거리의 제곱의 합에 비례한다고 할 때, 운반비용을 최소로 하는 물류창고의 위치는 선분 BC를 $t:1-t$로 내분하는 지점이다. t의 값을 구하시오.