#3 2026 수능 출제 예상 문제

1. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_{2}^{x}\{(x-2)^2-(t-2)^2\}f(t)dt$$라

하자. $g(x)$는 $x=5$에서 극대, $x=8$에서 극소이다. $f(9)$의 값을 구하시오.

$g'(x)=(x-2)\int_{2}^{x}f(t)dt$ 이므로

$\int_{2}^{5}f(x)dx=0,\ \int_{2}^{8}f(x)dx=0$

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$\int_{2}^{5}(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{2}^{5}=0$

$\int_{2}^{8}(x^2+ax+b)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx\right]_{2}^{8}=0$

$a=-10,\ b=22$

$f(x)=x^2-10x+22$

$f(9)=13$

이차함수의 대칭성을 생각해서 대칭축이 $x=5$라는 것을 알고 꼭짓점의 x좌표가 5임을 알 수도 있다.

2. $(0,\ 1)$을 지나는 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 $f'(x)=\begin{cases}-2 & (x<0)\\ 6x-2 & (x\ge 0)\end{cases}$이다. 곡선 $y=f(x)$와 구 직선 $x=-1,\ x=1$및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

$f(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x<0)\\ 3x^2-2x+1 & (x\ge 0)\end{cases}$

$\int_{-1}^{0}(-2x+1)dx+\int_{0}^{1}(3x^2-2x+1)dx$

$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^{0}+\left[x^3-x^2+x\right]_{0}^{1}$

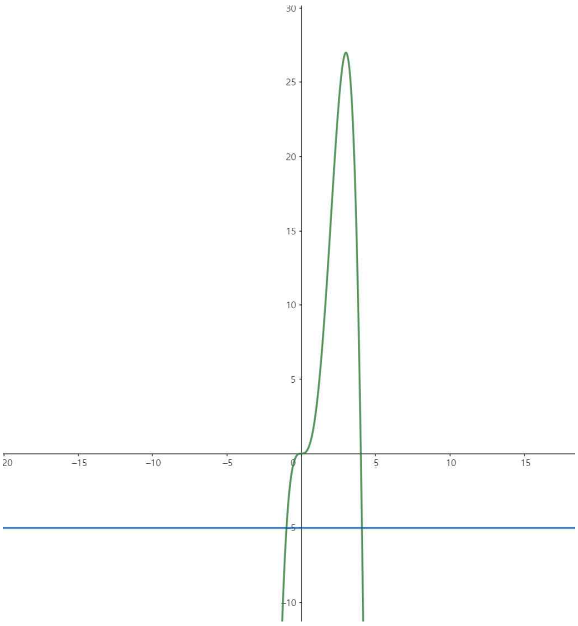
$=2+1=3$

3. 함수 $f(x)=-x^3(x-4)$과 실수 k에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} 2k-f(x) & (f(x)\geq k) \\ f(x) & (f(x)<k) \end{cases}$$

라 하자. 방정식 $g(x)=-5$의 실근의 개수가 4개가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

$f(x)=-x^3(x-4)$의 그래프가 다음과 같으므로



$k=-4,\ k=-3,\ \cdot\cdot\cdot,\ k=10$일 때 방정식 $g(x)=-5$의 실근의 개수가 4이므로

$5+6+7+8+9+10=45$

4. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$이

$$a_n+a_{n+1}=n$$을 만족시킨다.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{50}k(a_{k+1}-a_k)=1125$일 때, a_1의 값을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{50}k(a_{k+1}-a_k)$$
$$=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+\cdot\cdot\cdot+50(a_{51}-a_{50})$$
$$=-(a_1+a_2+\cdot\cdot\cdot+a_{50})+50a_{51}$$

$$-(1+3+5+\cdot\cdot\cdot+49)+50\times 25$$
$$=-25^2+50\times a_{51}=1125,\ a_{51}=35$$

$a_1=a,\ a_2=1-a$
$a_3=a+1,\ a_4=2-a$
$a_5=a+2,\ a_6=3-a$
$\cdot\cdot\cdot$

$a_{51}=a+25=35,\ a=10$

5. 함수 $f(x)=x^2$가 있다. 3이상의 양수 t에 대하여 점 $(t,\ 0)$과 점 $(x,\ f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 t의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때 $\int_{18}^{132} h(s)ds$의 값을 구하시오.

$\dfrac{f(s)-0}{s-t}\times f'(s)=-1$ 이므로

$s^2\times 2s=t-s$

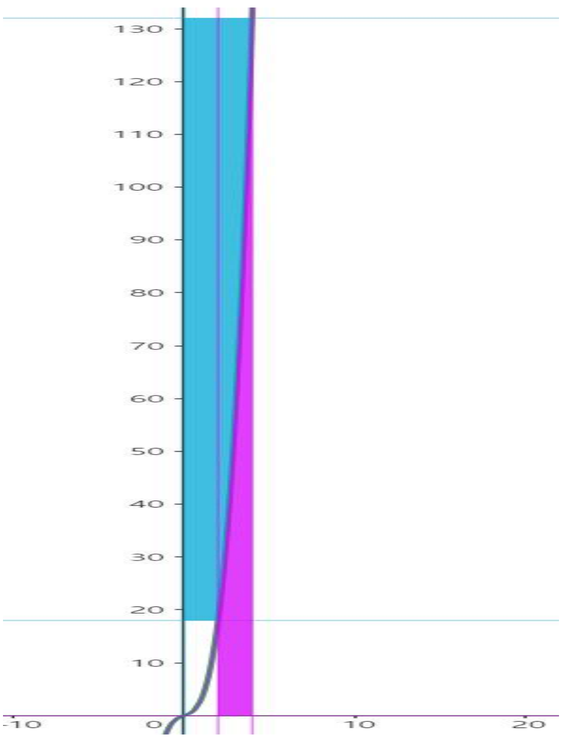
$t=2s^3+s,\ g(s)=2s^3+s$

$g(2)=18,\ g(4)=132$

$\int_{18}^{132} h(s)ds$

$=4\times 132-2\times 18-\int_2^4 g(s)ds$

$=528-36-126=366$



6. 자연수 $a,\ b$에 대하여, 부등식 $|\log_3 a-\log_3 18|+\log_3\dfrac{b}{3}\le 0$을 만족시키는 순서쌍 (a,b)의 개수를 구하시오.

$b=1$일 때,

$\log_3\dfrac{1}{3}\le \log_3\dfrac{a}{18}\le \log_3 3$

$6\le a\le 54$, 49개

$b=2$일 때,

$\log_3\dfrac{2}{3}\le \log_3\dfrac{a}{18}\le \log_3\dfrac{3}{2}$

$12\le a\le 27$, 16개

$b=3$일 때,

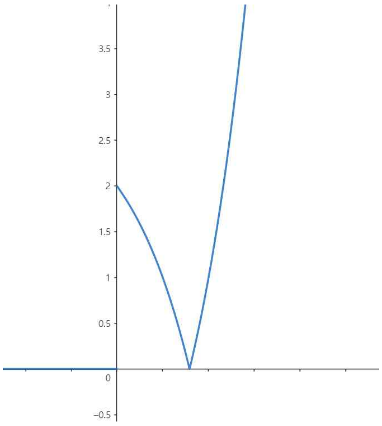
$a=18$

66쌍

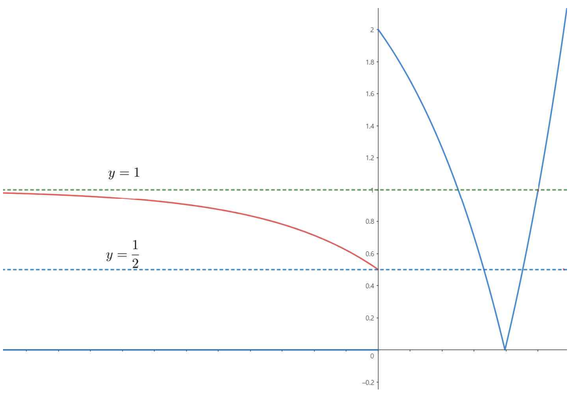
7. 함수 $f(x)=|4^x-3|$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x>0) \\ f(x+a)+b & (x\le 0) \end{cases}$

라 하자. 실수 t에 대하여 방정식 $g(x)=t$의 실근의 개수를 $h(t)$라 하면 $\{t \mid h(t)=3\}=\left\{t \,\middle|\, \frac{1}{2}\le t<1\right\}$이다. 이 때, $a\times b\times g(-1)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 음수이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)

$x>0$일 때, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$y=g(x)$와 $y=t$가 $\frac{1}{2}\le t<1$에서 교점의 개수가 3이려면 a가 음수이므로 $y=g(x)$의 그래프가 다음과 같은 그래프이다.



$b=-2$,

$g(0)=\frac{1}{2}$

$f(a)-2=|4^a-3|-2=\frac{1}{2}$

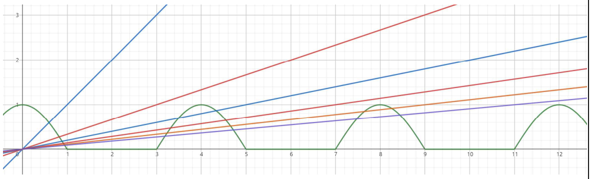
$a=\log_4\frac{11}{2}$ or $-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{2}$

$g(-1)=\left|4^{-1-\frac{1}{2}}-3\right|-2=\frac{7}{8}$

$p+q=15$

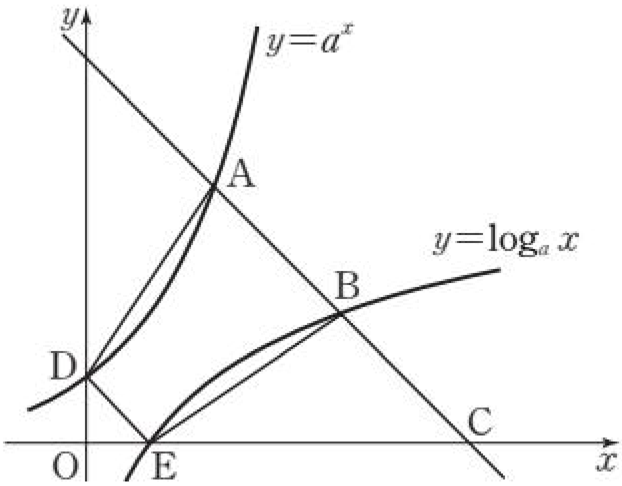
8. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)+\frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|$과 $y=\frac{1}{2n-1}x$이 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{25}a_n$의 값을 구하시오.



$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=3,\ a_4=3,\cdot\cdot\cdot$

$\sum_{n=2}^{25}a_n=1+2(3+5+\cdot\cdot\cdot+23)+25$
$=312$

9. $a>1$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1이고 y절편이 양수인 직선 $y=f(x)$이 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 C, 곡선 $y=a^x$이 y축과 만나는 점을 D, 곡선 $y=\log_a x$이 x축과 만나는 점을 E라 하자. $\overline{AB}=\overline{BC}=2\overline{DE}$일 때, 사각형 $ADEB$의 넓이는 S이다. $12S$의 값을 구하시오.



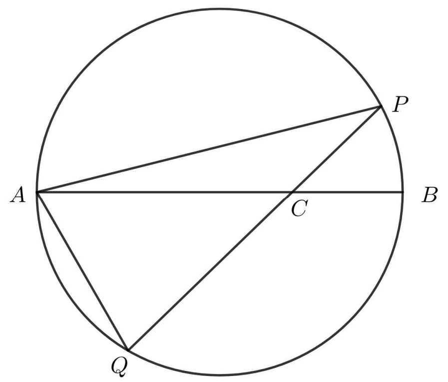
$\overline{DE}=\sqrt{2}$, $\overline{AB}=\overline{BC}=2\sqrt{2}$

$A(2,\ 4),\ B(4,\ 2),\ C(6,\ 0)$

$\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{15}{2}$

$12S=90$

10. 그림과 같이 AB를 지름으로 하는 원에 내접하는 삼각형 APQ가 있다. 선분 PQ와 선분 AB의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ACQ의 둘레의 길이는 18이고 $\sin(\angle ABP) = 2\sqrt{6}\cos(\angle AQP)$를 만족시킨다. $\overline{AQ}$, $\overline{QC}$, $\overline{CA}$는 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\overline{BC} = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



$\overline{AQ} + \overline{CA} = 2\overline{QC}$, $\overline{QC} = 6$

$\cos(\angle ABP) = \cos(\angle AQC) = \frac{1}{5}$

$\overline{AQ} = x$, $\overline{AC} = 12 - x$

$(12-x)^2 = x^2 + 6^2 - 2x \times 6 \times \frac{1}{5}$

$x = 5$

$\overline{BC} = y$라 하면

$\overline{PB} = \frac{7+y}{5}$

$5 : 6 = \frac{7+y}{5} : y$

$y = \frac{42}{19}$

11. 사차함수 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $f(x) = 0$의 실근은 α, β, γ 뿐이다. (단, $\alpha < \beta < \gamma$)
(나) 함수 $f(x)$의 극댓값은 16이다.

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 14$을 만족시키는 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $|f(1)|$의 최댓값을 구하시오.

$f(x)$는 우함수 이므로 $\alpha = -\gamma$, $\beta = 0$

$f(x) = ax^2(x-\gamma)(x+\gamma)$

$f\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right) = -a \times \frac{\gamma^4}{4} = 16$, $-a\gamma^4 = 64$

$f'(x) = 4ax^3 - 2a\gamma^2 x$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{2} - a\gamma^2 = 14$

$-\frac{64}{\gamma^4}\left(\frac{1}{2} - \gamma^2\right) = 14$, $\gamma^2 = 4$ or $\frac{4}{7}$

$f(x) = -196x^2\left(x^2 - \frac{4}{7}\right)$ or $-4x^2(x^2-4)$

$|f(1)| = 84$ or 12 이므로

$|f(1)|$의 최댓값은 84

12. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선과 곡선이 접하는 점을 A, 곡선과 점 A가 아닌 다른 점에서 만나는 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는 l이다. l^2의 값을 구하시오.

$A(t, f(t))$라 하면

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$4-f(t)=-tf'(t)$

$t(3t^2-1)-(t^3-t+2)+4=0$

$2t^3+2=0,\ t=-1$

$(-1, 2),\ f'(-1)=2$

$y=2x+4$

$A(-1, 2),\ B(2, 8)$

$l=3\sqrt{5},\ l^2=45$

13. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

$S_n-S_{n-1}=a_n$이므로

$a_n=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}\quad (n \geq 2)$

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}$

$=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$

$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\ (n \geq 2)$

$a_1=1$ 이므로

$a_n=\frac{n(n+1)}{2}\ (n \geq 1)$

$\sum_{n=1}^{10}\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}\left\{\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{10\times11}{2}\right\}=220$

14. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\int_a^2 f(x)dx = \frac{7}{2}$

(나) $\displaystyle\int_a^2 |f(x)|dx = \frac{13}{2}$

(다) 모든 실수 t에 대하여 $\displaystyle\int_0^t f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$이다.

방정식 $f(x)=0$의 해를 α, β(단, $\alpha < \beta$)라 할 때, $\displaystyle\int_{2a-2}^{\beta} f(x)dx$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

(다)에 의해 $f(x)$의 그래프는 $x=a$에 대하여 대칭임을 알 수 있다.

$\displaystyle\int_a^2 f(x)dx < \int_a^2 |f(x)|dx$ 이므로

$\alpha < a < \beta < 2$ 임을 알 수 있다.

$$\int_{2a-2}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{2} f(x)dx$$

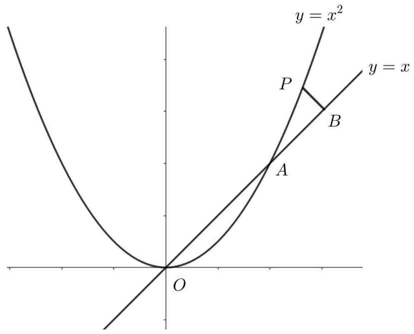
$$\int_a^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{2} f(x)dx = \frac{7}{2}$$

$$-\int_a^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{2} f(x)dx = \frac{13}{2}$$

$$\int_{\beta}^{2} f(x)dx = 5,\ \int_a^{\beta} f(x)dx = -\frac{3}{2} = \int_{\alpha}^{a} f(x)dx$$

$$\int_{\alpha}^{2} f(x)dx = 2\left(-\frac{3}{2}\right)+5 = 2$$

15. 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 곡선 $y=x^2$ 위의 A가 아닌 점을 $P(t,\ t^2)$이라 할 때, 점 P에서 $y=x$에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\displaystyle\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



$A(1,\ 1)$, $P(t,\ t^2)$, $B\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$

$\overline{AB} = \sqrt{2}\left|\dfrac{t^2+t}{2}-1\right|$, $\overline{PB} = \sqrt{2}\left|\dfrac{t^2+t}{2}-t\right|$

$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \lim_{t\to1}\frac{|t^2-t|}{|t^2+t-2|} = \frac{1}{3}$$

16. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 를 만족시킬 때, $\int_0^2 f(t)dt$의 최댓값은 M이다. $60M$의 값을 구하시오.

(가) $f'(x)=x^2-2x\int_0^2 f(t)dt$
(나) 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$$f'(x)=x\left(x-2\int_0^2 f(t)dt\right)$$

$$\int_0^2 f(t)dt=a$$

$a<0$이면 $f(x)$는 $x=2a$에서 극대, $x=0$에서 극소이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$a=0$이면 $f'(x)\geq 0$이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$a>0$이면 $f(x)$는 $x=0$에서 극대, $x=2a$에서 극소이므로 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지려면 $2a<2$이고 $f(0)\leq f(2)$를 만족해야 한다.

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+C$$

$$f(0)\leq f(2)$$

$$C\leq \frac{8}{3}-4a+C,\ a\leq \frac{2}{3}$$

$$60M=40$$

17. 곡선 $y=x^3-3x^2$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 $A,\ B$라 하자. 두 점 $A,\ B$를 지나는 직선과 점 A에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 m의 값의 합을 구하시오.

$A(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2)$이라 하면 두 점 $A,\ B$의 중점의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로 두 점 $A,\ B$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $A,\ (1,\ -2)$을 지나는 직선의 기울기는 일치한다. 또한 구하는 값이 m값의 합이므로 m에 대한 방정식을 세워야 한다.

$$f'(\alpha)=m=3\alpha^2-6\alpha$$

$$f'(\alpha)\times\frac{\alpha^3-3\alpha^2+2}{\alpha-1}=-1$$

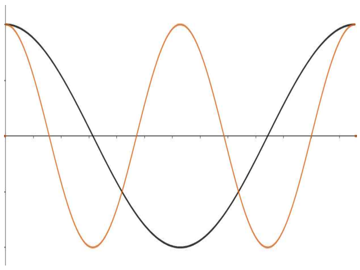
$$m\times\frac{(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-2)}{\alpha-1}=-1$$

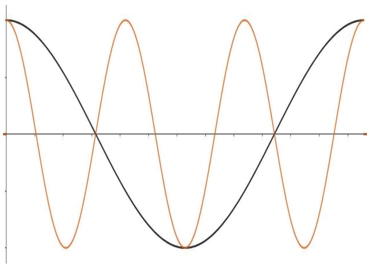
$$m\left(\frac{m}{3}-2\right)=-1$$

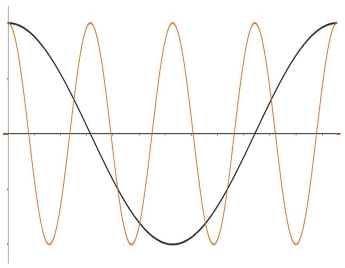
$$m^2-6m+3=0$$

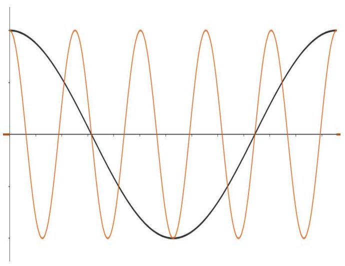
$$m_1+m_2=6$$

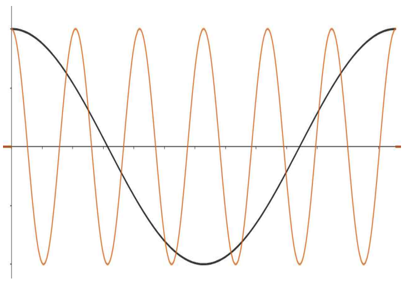
18. $0 \leq x \leq 2\pi$**일 때,** 2 **이상의 자연수** n**에 대하여 두 곡선** $y = \cos x$**,** $y = \cos(nx)$**의 교점의 개수를** a_n**이라 하자.** $\sum_{n=2}^{11} a_n$**의 값을 구하시오.**

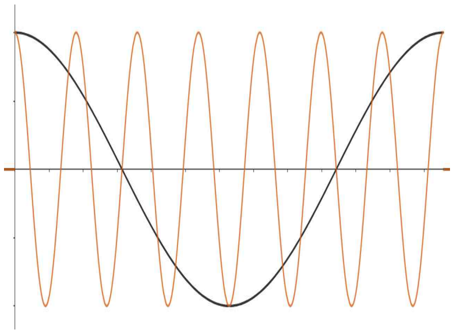












$a_2 + a_3 = 4 + 5$

$a_4 + a_5 = 8 + 9$

$a_6 + a_7 = 12 + 13$

$$\sum_{n=2}^{11} a_n = \frac{5(9+9+32)}{2} = 125$$

19. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 = n^2+4n$을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{a_k+a_{k+1}} = p$ 일 때, p^2의 값을 구하시오.

$(a_n)^2 = 2n+3,\ a_n = \sqrt{2n+3}\ (a_n > 0)$

$$\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n+5}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{59}(\sqrt{2n+5}-\sqrt{2n+3})$$
$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{7}-\sqrt{5})+(\sqrt{9}-\sqrt{7})+\cdot\cdot\cdot+(\sqrt{125}-\sqrt{123})\}$$
$$=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{5}=2\sqrt{5}$$

$p^2 = 20$

20. 양수 t에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3t^2x$의 닫힌구간 $[0,3]$에서 최솟값을 $g(t)$라 할 때, $g'\left(\frac{1}{2}\right)\times g'(5)$의 값을 구하시오.

함수 $f(x)$는 $x=t$에서 극솟값을 가지므로

$0<t<3$일 때, $g(t)=f(t)=-2t^3$

$3\le t$일 때, $g(t)=f(3)=27-9t^2$

$$g'(t)=\begin{cases}-6t^2 & (0<t<3)\\ -18t & (3\le t)\end{cases}$$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-6\times\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}$

$g'(5)=-18\times 5$

$g'\left(\frac{1}{2}\right)\times g'(5)=135$

21. x**에 대한 부등식** $4^{|x|}-17\times 2^{|x|}+16<0$**을 만족시키는 정수** x**의 개수를 구하시오.**

$(2^{|x|}-1)(2^{|x|}-16)<0$

$1<2^{|x|}<2^4$

$0<|x|<4$

$x=-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$

6**개**

22. **수직선 위를 움직이는 점** P**의 시각** t**에서의 위치** x**가** $x=(t-2)^2(t-a)$**일 때, 점** P**가 운동방향을 바꾸는 두 지점 사이의 거리는** 32**이다. 양수** a**의 값을 구하시오. (단,** $a>2$**)**

운동방향을 바꾸는 두 지점의 시각은 $t=2$ or $t=2+\dfrac{2(a-2)}{3}$ **이므로**

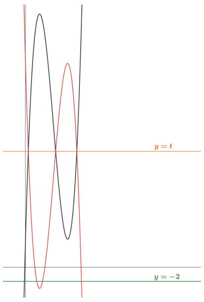
$$\left\{\frac{2(a-2)}{3}\right\}^2\left(\frac{2-a}{3}\right)=-32$$

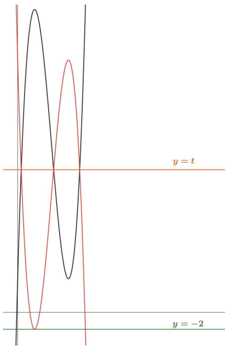
$$\left(\frac{a-2}{3}\right)^3=8,\ \frac{a-2}{3}=2,\ a=8$$

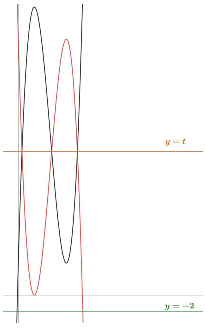
23. 최고차항의 계수가 2이고 $x=6$에서 극솟값을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2t-f(x) & (f(x)\geq t) \\ f(x) & (f(x)<t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 실수 t의 범위가 $1<t<17$일 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

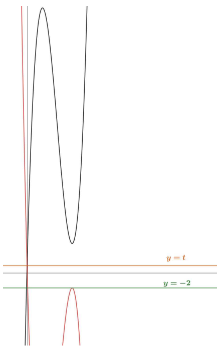


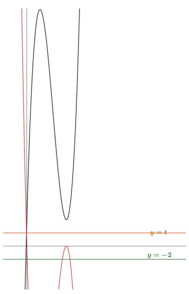




함수 $g(x)$는 $f(x)<t$인 구간에서는 $f(x)$이고 $f(x)\geq t$인 구간에서는 $y=t$에 대하여 대칭이동 시킨 그래프이다.

서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 극솟값이 -2보다 커야한다.





서로 다른 실근의 개수가 3이 될 때의 t의 값은 1 또는 17이고 이 때 극값과 -2의 평균이 1 또는 17이므로 $f(x)$의 극솟값은 4이고 극댓값은 36이다.

$f(x)=(x-6+3\alpha)(x-6)^2+4$

$f(6-2\alpha)=36,\ \alpha=2$

$f(x)=x(x-6)^2+4$

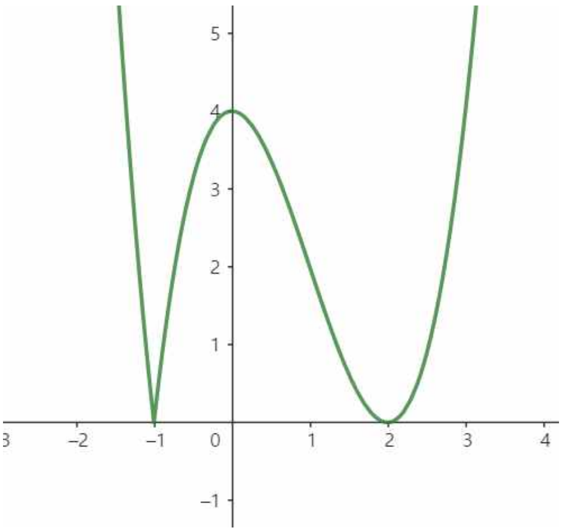
$f(7)=11$

24. **삼차함수** $y=x^3-3ax^2+4a$**에 대하여 함수** $g(x)=|f(x)|$**는 극댓값과 극솟값을 모두 가지고, 극솟값이** 0 **뿐이다. 이때 함수** $g(x)$**는** $x=p$**에서만 미분가능하지 않고 극댓값** q**를 가질 때,** $a+p+q$**의 값을 구하시오. (단,** $a>0$**이고** p,q**는 상수이다.)**

$y=x^3-3ax^2+4a$**은** $x=0$ or $x=2a$**에서 극값** 0**을 갖는다.** $\therefore\ a=0$ or $a=\pm1$

$a=1(a>0),\ p=-1,\ q=4$

$a+p+q=4$



25. **등비수열** $\{a_n\}$**에 대하여** $\sum_{k=1}^{10}a_k=682,\ \sum_{k=1}^{10}|a_k|=2046$ **일 때, 양수** a_3**의 값을 구하시오.**

$r<0,\ a_1>0\ \ (\because\ a_3>0)$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\frac{a_1(1-r^{10})}{1-r}=682$$

$$\sum_{k=1}^{10}|a_k|=\frac{a_1(1-|r|^{10})}{1-|r|}=2046$$

$$\frac{\dfrac{a_1(1-r^{10})}{1-r}}{\dfrac{a_1(1-|r|^{10})}{1-|r|}}=\frac{682}{2046},\ r=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{a_1\left(1-\dfrac{1}{1024}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=682,\ a_1=1024$$

$a_3=256$

26. $y=5^{x-3}+2$ 의 역함수를 $y=f(x)$ 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 점근선이 $y=\tan\frac{3\pi}{b}x+4$ 의 점근선이 되도록 하는 모든 양의 정수 b 의 값의 합을 구하시오.

$f(x)=\log_5(x-2)+3$**이므로 점근선은** $x=2$

$y=\tan\frac{3\pi}{b}x+4$**의 점근선은 정수** n**에 대하여** $\frac{nb}{3}+\frac{b}{6}$**이므로**

$b=\frac{12}{2n+1}$

$n=0$ 일 때, $b=12$
$n=1$ 일 때, $b=4$

$4+12=16$

27. 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ 이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{10}{11}$을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

$$a_n=\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{10}{11}$$

$n+1=121,\ n=120$

28. 정의역이 $\{x \mid 1 \le x \le 8\}$ 인 함수 $f(x)=4x^{4-\log_2 x}$ 가 $x=a$에서 최댓값 M을 가질 때, $a+M$의 값을 구하시오.

$\log_2 f(x)=2+(4-\log_2 x)\log_2 x$

$\log_2 a=2,\ a=4$

$\log_2 M=2+4=6,\ M=2^6=64$

$a+M=68$

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합을 구하시오.

(가) 함수 $\dfrac{x+1}{f(x)-x}$은 $x=0,\ x=3$에서만 불연속

(나) 방정식 $f(x)+x=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2

$f(x)-x=ax^2(x-3)$ or $ax(x-3)^2$

$f(x)=ax^2(x-3)+x$ or $ax(x-3)^2+x$

$$\begin{aligned} f(x)+x &= ax^2(x-3)+2x \text{ or } ax(x-3)^2+2x \\ &= x(ax^2-3ax+2) \text{ or } x\{a(x-3)^2+2\} \end{aligned}$$

$D=9a^2-8a=0 \qquad a=\dfrac{8}{9}$

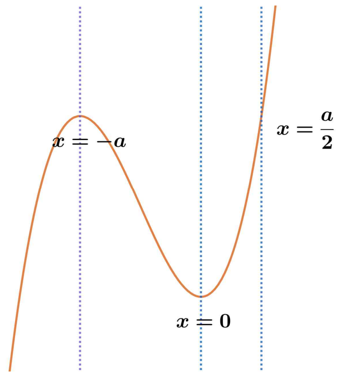
or $a=-\dfrac{2}{9}$

$f(x)=\dfrac{8}{9}x^2(x-3)+x$ or $-\dfrac{2}{9}x(x-3)^2+x$

$f(6)=102$ or -6

$102-6=96$

30. $0 < a < 6$인 a에 대하여 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x) = x(x+a)$일 때, 닫힌 구간 $[-a, 6]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 162일 때, $100a$의 값을 구하시오.



$\frac{a}{2} < 6$ 이므로 닫힌구간 $[-a, 6]$에서 최댓값은 $f(6)$최솟값은 $f(0)$이다.

$$f(6)-f(0)=\int_0^6 f'(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^6 = 72+18a = 162$$

$a = 5$

$100a = 500$