

수학 영역

제 2 교시

1

1. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) \text{를 } g(x) = \int_2^x \{(x-2)^2 - (t-2)^2\} f(t) dt \text{라 하자. } g(x) \text{는}$$

$x=5$ 에서 극대, $x=8$ 에서 극소이다. $f(9)$ 의 값을 구하시오.

2. $(0, 1)$ 을 지나는 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & (x < 0) \\ 6x - 2 & (x \geq 0) \end{cases} \text{이다. 곡선 } y = f(x) \text{와 구 직선}$$

$x = -1, x = 1$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

3. 함수 $f(x) = -x^3(x-4)$ 과 실수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} 2k - f(x) & (f(x) \geq k) \\ f(x) & (f(x) < k) \end{cases} \text{라 하자. 방정식 } g(x) = -5 \text{의 실}$$

근의 개수가 4개가 되도록 하는 모든 정수 k 의 값의 합을 구하시오.

4. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + a_{n+1} = n$

$$\text{을 만족시킨다. } \sum_{k=1}^{50} k(a_{k+1} - a_k) = 1125 \text{일 때, } a_1 \text{의 값을}$$

구하시오.

5. 함수 $f(x) = x^2$ 가 있다. 3이상의 양수 t 에 대하여 점 $(t, 0)$ 과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x = s$ 에서 최소일 때, 실수 t 의 값을 $g(s)$ 라 하자. 함수 $g(s)$ 의 역함수를 $h(s)$ 라 할 때 $\int_{18}^{132} h(s)ds$ 의 값을 구하시오.

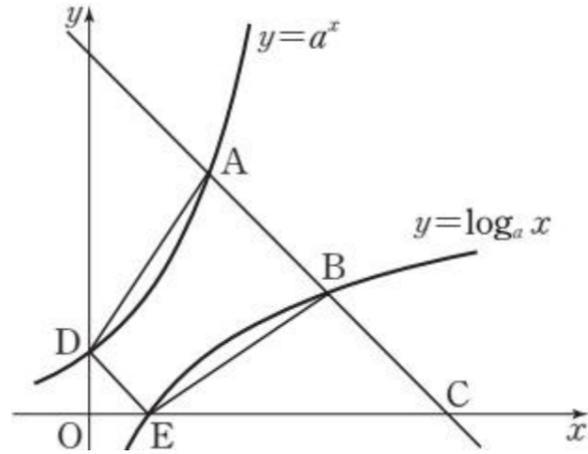
6. 자연수 a, b 에 대하여, 부등식 $|\log_3 a - \log_3 18| + \log_3 \frac{b}{3} \leq 0$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수를 구하시오.

7. 함수 $f(x) = |4^x - 3|$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 0) \\ f(x+a)+b & (x \leq 0) \end{cases}$

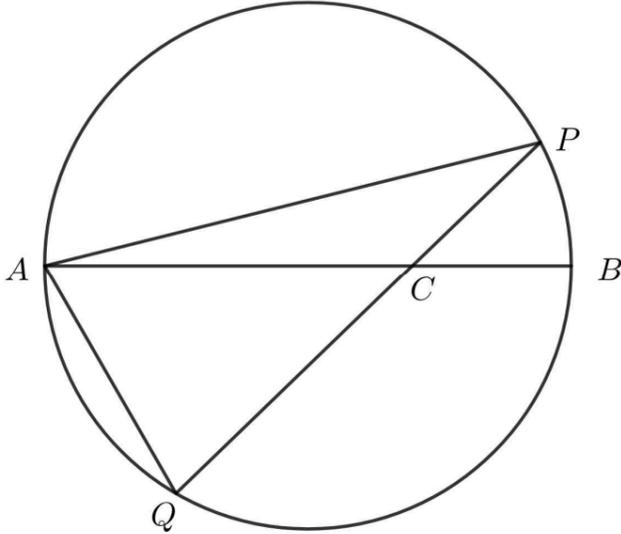
라 하자. 실수 t 에 대하여 방정식 $g(x) = t$ 의 실근의 개수를 $h(t)$ 라 하면 $\{t | h(t) = 3\} = \left\{t \mid \frac{1}{2} \leq t < 1\right\}$ 이다. 이 때, $a \times b \times g(-1) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 음수이고, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

8. 자연수 n 에 대하여 곡선 $y = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \frac{1}{2} \left| \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right|$ 과 $y = \frac{1}{2n-1}x$ 이 만나는 점의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=2}^{25} a_n$ 의 값을 구하시오.

9. $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 기울기가 -1 이고 y 절편이 양수인 직선 $y = f(x)$ 이 두 곡선 $y = a^x$, $y = \log_a x$ 과 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. 직선 $y = f(x)$ 가 x 축과 만나는 점을 C , 곡선 $y = a^x$ 이 y 축과 만나는 점을 D , 곡선 $y = \log_a x$ 이 x 축과 만나는 점을 E 라 하자. $\overline{AB} = \overline{BC} = 2\overline{DE}$ 일 때, 사각형 $ADEB$ 의 넓이는 S 이다. $12S$ 의 값을 구하시오.



10. 그림과 같이 AB 를 지름으로 하는 원에 내접하는 삼각형 APQ 가 있다. 선분 PQ 와 선분 AB 의 교점을 C 라 할 때, 삼각형 ACQ 의 둘레의 길이는 18이고 $\sin(\angle ABP) = 2\sqrt{6}\cos(\angle AQP)$ 를 만족시킨다. $\overline{AQ}, \overline{QC}, \overline{CA}$ 는 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\overline{BC} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



11. 사차함수 $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, c 는 상수)가 다음 조건을 만족시킨다.

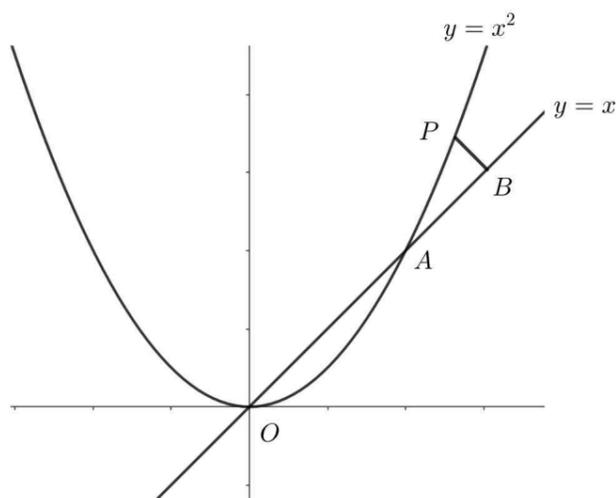
- (가) 방정식 $f(x) = 0$ 의 실근은 α, β, γ 뿐이다. (단, $\alpha < \beta < \gamma$)
 (나) 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 16이다.

$f'(\frac{1}{2}) = 14$ 을 만족시키는 모든 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 $|f(1)|$ 의 최댓값을 구하시오.

12. 점 $(0, 4)$ 에서 곡선 $y = x^3 - x + 2$ 에 그은 접선과 곡선이 접하는 점을 A , 곡선과 점 A 가 아닌 다른 점에서 만나는 점을 B 라 할 때, 선분 AB 의 길이는 l 이다. l^2 의 값을 구하시오.

13. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $a_1 = 1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 $S_n = \frac{n+2}{3}a_n$ 을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오.

15. 직선 $y = x$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A 라 하자. 곡선 $y = x^2$ 위의 A 가 아닌 점을 $P(t, t^2)$ 이라 할 때, 점 P 에서 $y = x$ 에 내린 수선의 발을 B 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{PB}{AB} = \frac{b}{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)



14. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_a^2 f(x)dx = \frac{7}{2}$

(나) $\int_a^2 |f(x)|dx = \frac{13}{2}$

(다) 모든 실수 t 에 대하여 $\int_0^t f(x)dx = \int_{2a-t}^{2a} f(x)dx$ 이다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 해를 α, β (단, $\alpha < \beta$)라 할 때,

$\int_{2a-2}^{\beta} f(x)dx$ 의 값을 구하시오. (단, a 는 상수이다.)

16. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 틀 만
 족시킬 때, $\int_0^2 f(t)dt$ 의 최댓값은 M 이다. $60M$ 의 값을
 구 하 시 오 .

(가) $f'(x) = x^2 - 2x \int_0^2 f(t)dt$

(나) 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값
 을 갖는다.

17. 곡선 $y = x^3 - 3x^2$ 에 기울기가 m 인 접선을 두 개 그었을
 때, 두 접점을 A, B 라 하자. 두 점 A, B 를 지나는 직
 선과 점 A 에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든
 실수 m 의 값의 합을 구하시오.

18. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = \cos x$, $y = \cos(nx)$ 의 교점의 개수를 a_n 이라 하자. $\sum_{n=2}^{11} a_n$ 의 값을 구하시오.

19. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^n (a_k)^2 = n^2 + 4n$ 을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{60} \frac{1}{a_k + a_{k+1}} = p$ 일 때, p^2 의 값을 구하시오.

20. 양수 t 에 대하여 함수 $f(x) = x^3 - 3t^2x$ 의 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 최솟값을 $g(t)$ 라 할 때, $g'(\frac{1}{2}) \times g'(5)$ 의 값을 구하시오.

21. x 에 대한 부등식 $4^{|x|} - 17 \times 2^{|x|} + 16 < 0$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수를 구하시오.

22. 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x = (t-2)^2(t-a)$ 일 때, 점 P 가 운동방향을 바꾸는 두 지점 사이의 거리는 32이다. 양수 a 의 값을 구하시오. (단, $a > 2$)

23. 최고차항의 계수가 2이고 $x=6$ 에서 극솟값을 갖는 삼차 함수 $f(x)$ 가 있다. 실수 t 에 대하여 함수 $g(x)$ 를 $g(x) = \begin{cases} 2t - f(x) & (f(x) \geq t) \\ f(x) & (f(x) < t) \end{cases}$ 라 할 때, 방정식 $g(x) = -2$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 실수 t 의 범위가 $1 < t < 17$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하시오.

25. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 682$, $\sum_{k=1}^{10} |a_k| = 2046$ 일 때, 양수 a_3 의 값을 구하시오.

24. 삼차함수 $y = x^3 - 3ax^2 + 4a$ 에 대하여 함수 $g(x) = |f(x)|$ 는 극댓값과 극솟값을 모두 가지고, 극솟값이 0 뿐이다. 이때 함수 $g(x)$ 는 $x=p$ 에서만 미분가능하지 않고 극댓값 q 를 가질 때, $a+p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $a > 0$ 이고 p, q 는 상수이다.)

26. $y = 5^{x-3} + 2$ 의 역함수를 $y = f(x)$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 의 점근선이 $y = \tan \frac{3\pi}{b}x + 4$ 의 점근선이 되도록 하는 모든 양의 정수 b 의 값의 합을 구하시오.

27. 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을

$a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n+n}\sqrt{n+1}}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{10}{11}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하시오.

28. 정의역이 $\{x \mid 1 \leq x \leq 8\}$ 인 함수

$f(x) = 4x^{4-\log_2 x}$ 가 $x = a$ 에서 최댓값 M 을 가질 때, $a+M$ 의 값을 구하시오.

29. 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(6)$ 의 값이 될 수 있는 모든 실수의 합을 구하시오.

(가) 함수 $\frac{x+1}{f(x)-x}$ 은 $x=0, x=3$ 에서만 불연속

(나) 방정식 $f(x)+x=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2

30. $0 < a < 6$ 인 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 의 도함수가 $f'(x) = x(x+a)$ 일 때, 닫힌 구간 $[-a, 6]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 차가 162일 때, $100a$ 의 값을 구하시오.