2025 경찰대 기출문제

수학 영역

제 2 교시

1. $\left(2^{\sqrt{3}+1}\right)^{2\sqrt{3}-2}$의 값은?

① $8\sqrt{2}$　　② 16　　③ $16\sqrt{2}$
④ 32　　⑤ $32\sqrt{2}$

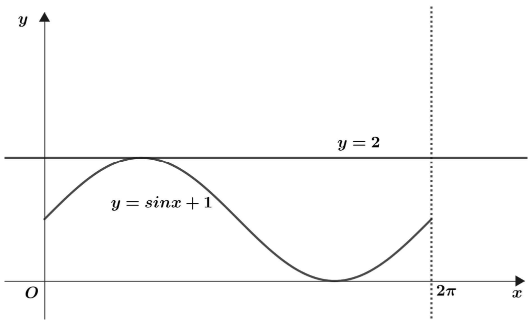
$\left(2^{\sqrt{3}+1}\right)^{2\sqrt{3}-2}=\left(2^{\sqrt{3}+1}\right)^{2(\sqrt{3}-1)}=\left\{2^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\right\}^2=\left(2^2\right)^2=4^2=16$

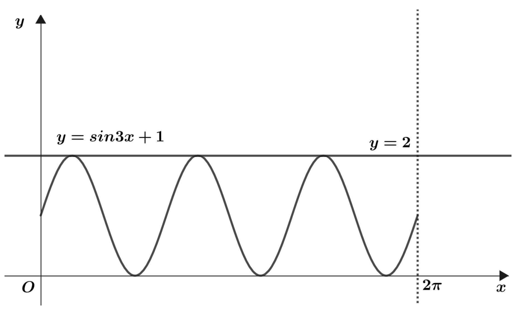
②

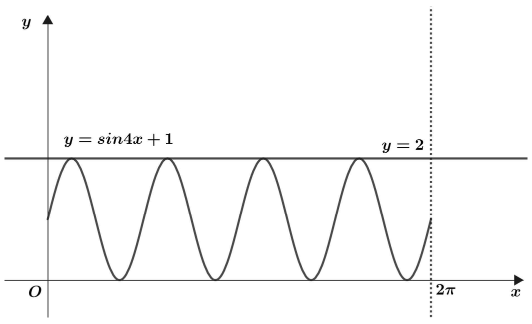
2. 두 자연수 a, b에 대하여, $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin bx+a$의 그래프가 직선 $y=2$와 서로 다른 네 점에서 만난다. ab의 최솟값은?

① 4　　② 6　　③ 8
④ 10　　⑤ 12

ab의 최솟값을 구하는 문제이고
함수 $f(x)=a\sin bx+a$의 최댓값은 $2a$이므로 $a=1$이고 $b=1$, $b=3$, $b=4$일 때의 그래프는 다음과 같다.

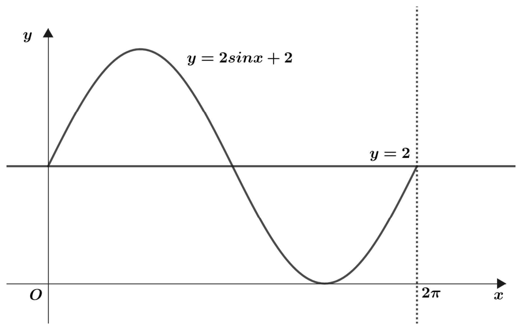


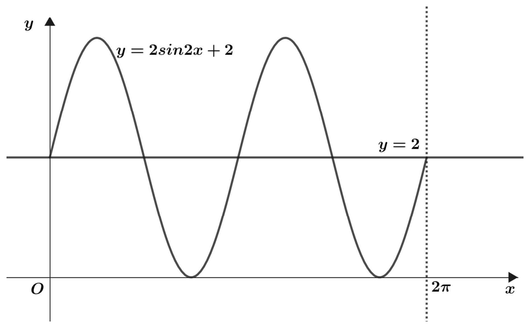




$a=1$일 때 함수 $f(x)=a\sin bx+a$의 그래프가 직선 $y=2$와 서로 다른 네 점에서 만나려면 $b=4$일 때이다.

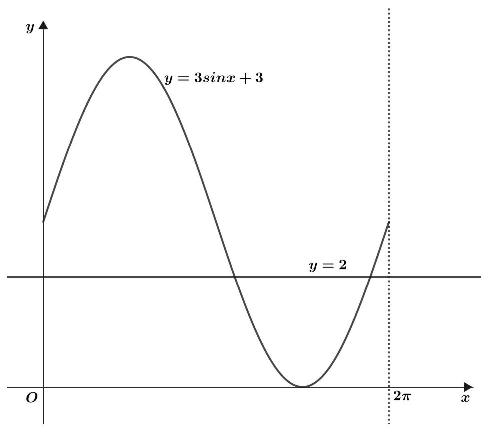
$a=2$이고 $b=1$, $b=2$일 때의 그래프는 다음과 같다.

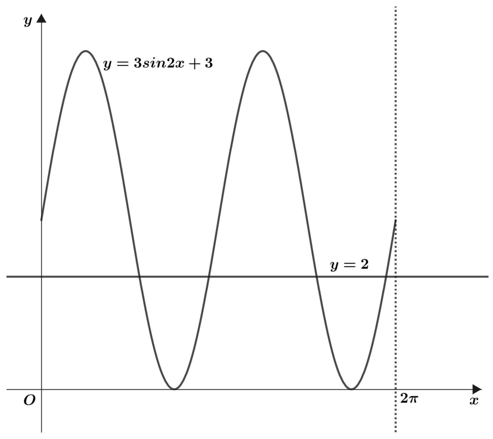




$a=2$일 때 함수 $f(x)=a\sin bx+a$의 그래프가 직선 $y=2$와 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

$a=3$이고 $b=1$, $b=2$일 때의 그래프는 다음과 같다.





그러므로 $0\le x\le 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin bx+a$의 그래프가 직선 $y=2$와 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는 $a\ge 3$이고 $b=2$일 때 이므로 ab의 최솟값은 $a=1$이고 $b=4$일 때 4이다.

①

3. 자연수 n에 대하여 다항식 $(x+1)^n$을 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R_n(x)$라 하자. $\sum_{n=1}^{8} R_n(2)$의 값은?

① 1008 ② 1012 ③ 1016
④ 1020 ⑤ 1024

다항식 $(x+1)^n$을 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$, 나머지를 $R_n(x)=ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$(x+1)^n=x(x-1)Q_n(x)+ax+b$ …… ㉠
㉠에 $x=0$을 대입하면
$b=1$
㉠에 $x=1$을 대입하면
$2^n=a+b$에서 $a=2^n-b=2^n-1$
따라서 $R_n(x)=(2^n-1)x+1$이므로
$\sum_{n=1}^{8} R_n(2)=\sum_{n=1}^{8}\{(2^n-1)\times 2+1\}=\sum_{n=1}^{8}(2\times 2^n-1)=2\sum_{n=1}^{8}2^n-\sum_{n=1}^{8}1$
$=2\times\frac{2(2^8-1)}{2-1}-1\times 8=2^{10}-4-8=1024-4-8=1012$

②

4. 40 이하의 두 자연수 m, n에 대하여 $-\log_{\sqrt{2}}m+\log_{\frac{1}{2}}(4n+6)^{-1}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m,n)의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

$-\log_{\sqrt{2}}m+\log_{\frac{1}{2}}(4n+6)^{-1}=-\log_2 m^2+\log_2(4n+6)=\log_2\frac{4n+6}{m^2}$의 값이 자연수이므로 $\log_2\frac{4n+6}{m^2}=k$(k는 자연수)라 할 수 있다.

$\log_2\frac{4n+6}{m^2}=k$에서
$\frac{4n+6}{m^2}=2^k$, $m^2=\frac{4n+6}{2^k}=\frac{2n+3}{2^{k-1}}$
2^{k-1}은 $k=1$일 때 1이고 $k\geq 2$일 때는 짝수이다.
$2n+3$은 홀수이므로
$k\geq 2$이면 $\frac{2n+3}{2^{k-1}}$은 정수가 아닌 유리수이고
m이 자연수라는 조건에 모순이다.
따라서 $k=1$이고 $m^2=2n+3$이므로
$2n+3$은 홀수인 제곱수이다.
$2n+3=9$ 또는 25 또는 49 또는 81(n은 40이하의 자연수이므로) 이다.
따라서 순서쌍 (m,n)은 $(3,3)$, $(5,11)$, $(7,23)$, $(9,39)$이고 그 개수는 4이다.

①

5. $1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+19^3$의 값은?

① 3300 ② 3400 ③ 3500
④ 3600 ⑤ 3700

$1^3-2^3+3^3-4^3+\cdots+19^3$
$=(1^3+3^3+5^3+\cdots+19^3)-(2^3+4^3+6^3+\cdots+18^3)$
$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+19^3)$
$-2(2^3+4^3+6^3+\cdots+18^3)$
$=\sum_{k=1}^{19}k^3-2\sum_{k=1}^{9}(2k)^3=\sum_{k=1}^{19}k^3-16\sum_{k=1}^{9}k^3$
$=\left(\frac{19(19+1)}{2}\right)^2-16\times\left(\frac{9(9+1)}{2}\right)^2=190^2-16\times45^2=190^2-180^2$
$=(190+180)(190-180)=3700$

⑤

6. 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (x(x-3)\neq0)\\ 0 & (x(x-3)=0)\end{cases}$이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다. $g(0)=5$이고 함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(6)$의 값은?

① 245 ② 247 ③ 249
④ 251 ⑤ 253

함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=3$을 제외한 모든 구간에서
연속함수이므로 함수 $(g\circ f)(x)$이 실수 전체의 집합에서
연속이려면 $x=0$과 $x=3$에서만 연속이면 실수 전체의 집합에성
연속이다.
즉, $\lim_{x\to0-}g(f(x))=\lim_{x\to0+}g(f(x))=g(f(0))$
$\lim_{x\to3-}g(f(x))=\lim_{x\to3+}g(f(x))=g(f(3))$이어야 한다.
$\lim_{x\to0-}g(f(x))=g(1)$
$\lim_{x\to0+}g(f(x))=g(1)$
$g(f(0))=g(0)$이므로
$g(1)=g(0)$
$\lim_{x\to3-}g(f(x))=g(-2)$
$\lim_{x\to3+}g(f(x))=g(-2)$
$g(f(3))=g(0)$이므로
$g(-2)=g(0)$
따라서 $g(-2)=g(0)=g(1)=5$이므로
$g(x)=(x+2)x(x-1)+5$이고
$g(6)=8\times6\times5+5=245$

①

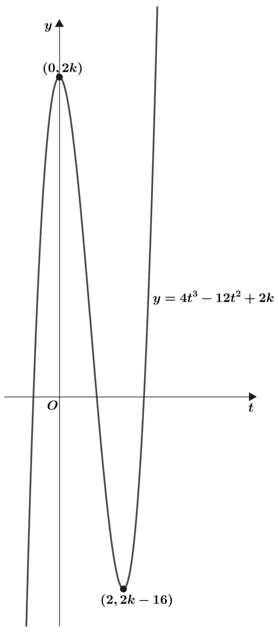
7. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치 x가 $x = t^4 - 4t^3 + 2kt$이다. 점 P가 원점을 출발한 후 운동 방향을 두 번 바꾸도록 하는 정수 k의 개수는?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면
$v = \frac{dx}{dt} = 4t^3 - 12t^2 + 2k$
점 P가 원점을 출발한 후 운동 방향을 두 번 바꾸려면
방정식 $4t^3 - 12t^2 + 2k = 0$이 서로 다른 두 양수근을 가져야 하고
그 양수근 좌우에서 속도의 부호가 바뀌어야 한다.
$f(t) = 4t^3 - 12t^2 + 2k$라 하면
$f'(t) = 12t^2 - 24t = 12t(t-2)$
$f'(t) = 0$에서 $t = 0$ 또는 $t = 2$
함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$2k$	↘	$2k-16$	↗

함수 $y = f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 점 P가 원점을 출발한 후 운동 방향을 두 번 바꾸려면
$2k > 0$이고 $2k - 16 < 0$를 만족시켜야 한다.
따라서 $0 < k < 8$이고 정수 k의 최솟값은 1, 최댓값은 7이므로
정수 k의 개수는 7이다.

④

8. 넓이가 $4\sqrt{3}$이고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4일 때, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$의 값은?

① $4(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ ② $4(2 + \sqrt{3})$
③ $4(\sqrt{3} + \sqrt{5})$ ④ $4(\sqrt{3} + \sqrt{6})$
⑤ $4(\sqrt{3} + \sqrt{7})$

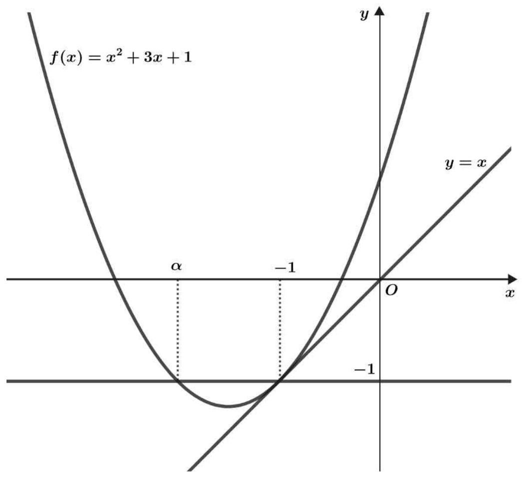
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4이고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$이므로
사인법칙에 의하여
$\overline{BC} = 2R\sin A = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로
$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \overline{AB} \times \overline{AC} = 4\sqrt{3}$에서 $\overline{AB} \times \overline{AC} = 16$
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{CA} \times \cos A$
$48 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 - 2 \times 16 \times \frac{1}{2}$
$\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 = 48 + 16 = 64$
$(\overline{AB} + \overline{CA})^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 + 2\overline{AB} \times \overline{CA} = 96$
$\overline{AB} + \overline{CA} > 0$이므로 $\overline{AB} + \overline{CA} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$
따라서 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 4\sqrt{3} + 4\sqrt{6} = 4(\sqrt{3} + \sqrt{6})$

④

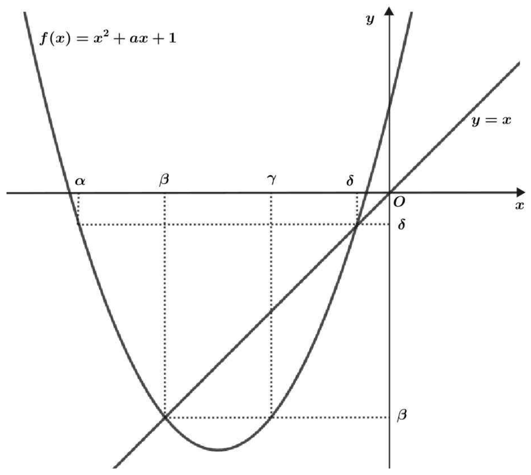
9. 함수 $f(x)=x^2+ax+1$에 대하여 집합 $\{x|f(f(x))=f(x),\ x$는 실수$\}$의 원소의 개수가 2일 때, 양수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 0개 또는 1개 또는 2개이므로 세가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 0인 경우
방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근은 존재하지 않는다.
(ⅱ) 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 1인 경우
$x^2+ax+1=x$
이차방정식 $x^2+(a-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면 서로 다른 실근의 개수가 1이므로 $D=0$이다.
$D=(a-1)^2-4=0$에서
$a=-1$ 또는 $a=3$이고
양수 $a=3$이다.

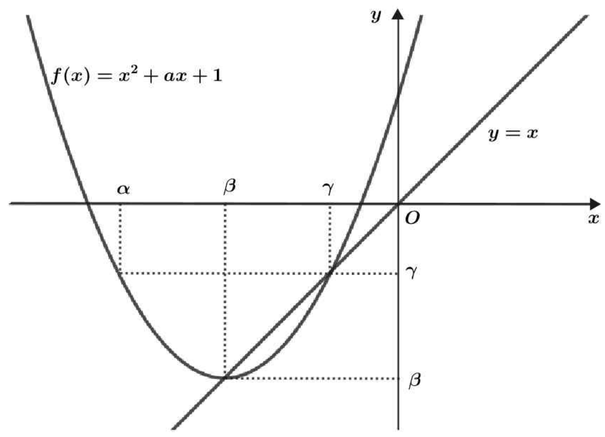


$f(f(\alpha))=f(-1)=-1$이고, $f(\alpha)=-1$이므로
$x=\alpha$는 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근이고
$f(f(-1))=f(-1)=-1$이고, $f(-1)=-1$
$x=-1$는 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근이다.
따라서 문제의 조건을 만족하는 양수 $a=3$이다.
(ⅲ) 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 2인 경우



$f(f(\alpha))=f(\delta)=\delta$이고, $f(\alpha)=\delta$
$f(f(\beta))=f(\beta)=\beta$이고, $f(\beta)=\beta$
$f(f(\gamma))=f(\beta)=\beta$이고, $f(\gamma)=\beta$
$f(f(\delta))=f(\delta)=\delta$이고, $f(\delta)=\delta$
이므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 4이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

다음 그래프와 같은 경우는 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이므로 문제의 조건에 맞지 않다.



③

10. 실수 θ에 대하여 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+2x\sin\theta-\cos^2\theta$이 만나는 두 점 사이의 거리의 최댓값은?

① $2\sqrt{2}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

방정식 $x^2+2x\sin\theta-\cos^2\theta=x$, $x^2+(2\sin\theta-1)x-\cos^2\theta=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+2x\sin\theta-\cos^2\theta$이 만나는 두 점의 좌표는 (α,α), (β,β)이므로 두 점 사이의 거리는
$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta-\alpha)^2}=\sqrt{2}\,|\beta-\alpha|$이다.
이차방정식 $x^2+(2\sin\theta-1)x-\cos^2\theta=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-(2\sin\theta-1)$, $\alpha\beta=-\cos^2\theta$이므로
$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\{-(2\sin\theta-1)\}^2-4(-\cos^2\theta)$
$=4\sin^2\theta-4\sin\theta+1+4\cos^2\theta=4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-4\sin\theta+1$
$=5-4\sin\theta$
$1\le 5-4\sin\theta\le 9$이므로
$1\le|\beta-\alpha|\le 3$이다.
따라서 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2+2x\sin\theta-\cos^2\theta$이 만나는 두 점 사이의 거리의 최댓값은 $3\sqrt{2}$

②

11. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $b_n=n^2\sin(\pi a_n)+n\cos(\pi a_n)+1$, $\sum_{n=1}^{7}b_n=3$을 만족시킬 때, $b_{48}+b_{49}+b_{50}$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항과 공차가 정수이므로 모든 항이 정수이다. 따라서 $\sin(\pi a_n)=0$이다.
$|a_n|$이 홀수이면 $n\cos(\pi a_n)=-n$
$|a_n|$이 짝수이면 $n\cos(\pi a_n)=n$이므로
$b_n=\begin{cases}-n+1 & (a_n\text{이 홀수})\\ n+1 & (a_n\text{이 짝수})\end{cases}$이다.
수열 $\{a_n\}$의 공차가 짝수이면 $|a_n|$은 모두 홀수이거나 모두 짝수이므로 $\sum_{n=1}^{7}b_n=3$을 만족시킬 수 없다.
(i) $|a_1|$이 짝수, $|d|$가 홀수인 경우
$b_1=2$, $b_2=-1$, $b_3=4$, $b_4=-3$, $b_5=6$, $b_6=-5$, $b_7=8$이므로
$\sum_{n=1}^{7}b_n=3$을 만족하지 않는다.
(ii) $|a_1|$이 홀수, $|d|$가 홀수인 경우
$b_1=0$, $b_2=3$, $b_3=-2$, $b_4=5$, $b_5=-4$, $b_6=7$, $b_7=-6$이므로
$\sum_{n=1}^{7}b_n=3$을 만족한다.
따라서 $b_{48}=49$, $b_{49}=-48$, $b_{50}=51$이므로
$b_{48}+b_{49}+b_{50}=49+(-48)+51=52$

③

12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=2a_n-pn$이다. $\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{a_k a_{k+1}}=3$일 때, 상수 p의 값은?

① $\frac{36}{127}$ ② $\frac{38}{127}$ ③ $\frac{40}{127}$
④ $\frac{42}{127}$ ⑤ $\frac{44}{127}$

$S_1=a_1$이므로 $S_n=2a_n-pn$에서 $n=1$을 대입하면 $S_1=2a_1-p$,
즉 $a_1=p$
수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여
$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\{2a_{n+1}-p(n+1)\}-(2a_{n-1}-pn)=2a_{n+1}-2a_n-p$
$a_{n+1}=2a_n+p$에서 $a_{n+1}-a_n=a_n+p$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{a_k a_{k+1}}=\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{p+a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{6}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_6}-\frac{1}{a_7}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_7}$$

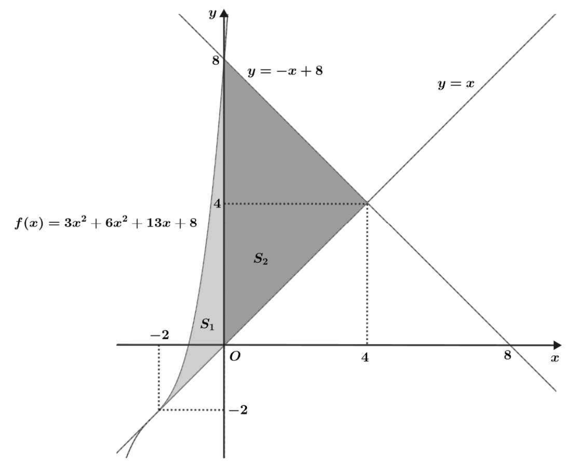
$a_1=p$이고 $a_{n+1}=2a_n+p$이므로
$a_2=2a_1+p=2p+p$, $a_3=2^2p+2p+p$
$a_4=2^3p+2^2p+2p+p$, $\cdots$
$$a_7=2^6p+2^5p+\cdots+2p+p=\frac{p(2^7-1)}{2-1}=127p$$
$$\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_7}=\frac{1}{p}-\frac{1}{127p}=\frac{127-1}{127p}=\frac{126}{127p}=3$$
따라서 $p=\frac{1}{3}\times\frac{126}{127}=\frac{42}{127}$

④

13. 함수 $f(x)=x^3+6x^2+13x+8$의 역함수를 $g(x)$라고 하자. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $y=-x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 36 ② 40 ③ 44
④ 48 ⑤ 52

$f(x)=x^3+6x^2+13x+8$에서
$f'(x)=3x^2+12x+13=3(x+2)^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수이다.
즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 좌표는 모두 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나는 점의 좌표와 같다.
$f(x)=x$에서
$x^3+6x^2+13x+8=x$
$x^3+6x^2+12x+8=0$
$(x+2)^3=0$에서
$x=-2$이다.
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 $(-2,-2)$에서만 만나고
$x<-2$에서 $f(x)<x$
$x\ge-2$에서 $f(x)\ge x$이다.



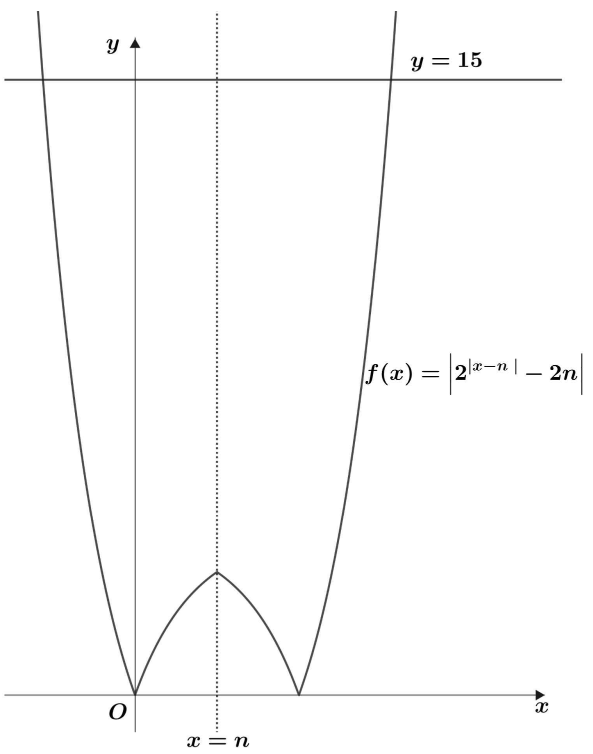
함수 $g(x)$가 함수 $f(x)=x^3+6x^2+13x+8$의 역함수 이므로 두 곡선$y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $y=-x+8$로 둘러싸인 도형의 넓이 $2(S_1+S_2)$와 같고
$$S_1=\int_{-2}^{0}\{f(x)-x\}dx=\int_{-2}^{0}(x+2)^3dx=\left[\frac{1}{4}(x+2)^4\right]_{-2}^{0}=4$$
$$S_2=\frac{1}{2}\times8\times4=16$$
따라서 $2(S_1+S_2)=40$

②

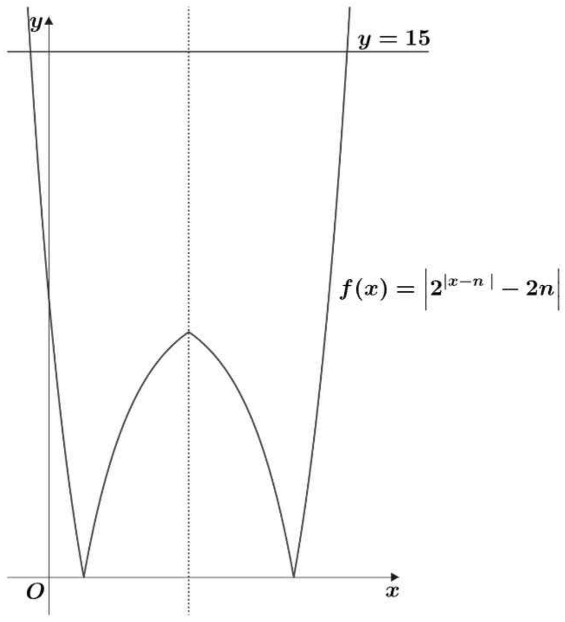
14. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$의 그래프가 직선 $y=15$와 제1사분면에서 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은?

① 52 ② 55 ③ 58
④ 61 ⑤ 64

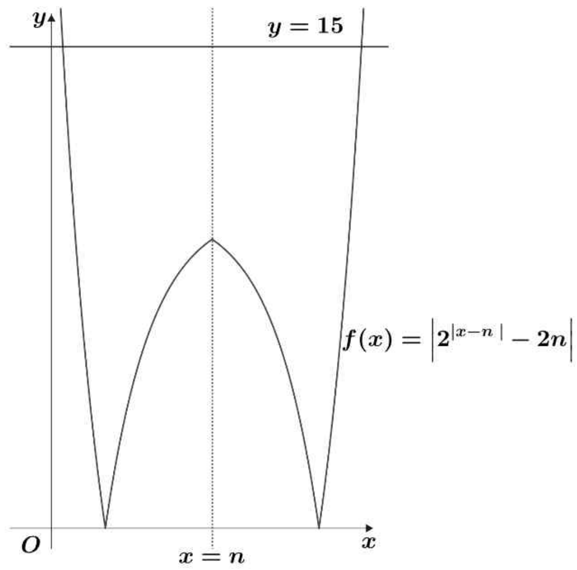
$f(x)=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$라 하면
$f(2n-x)=\left|2^{|(2n-x)-n|}-2n\right|=\left|2^{|n-x|}-2n\right|=\left|2^{|x-n|}-2n\right|=f(x)$
이므로
$y=f(x)$는 직선 $x=n$에 대하여 대칭이다.
$f(0)=\left|2^n-2n\right|$에서
$n=1$일 때 $\left|2^1-2\times1\right|=0$
$n=2$일 때 $\left|2^2-2\times2\right|=0$
$n=3$일 때 $\left|2^3-2\times3\right|=2$
$n=4$일 때 $\left|2^4-2\times4\right|=8$
$n=5$일 때 $\left|2^5-2\times5\right|=22$
$f(n)=|1-2n|=|2n-1|$이므로
$2n-1=15$에서 $n=8$,
함수 $f(x)=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$의 그래프는 다음과 같다.



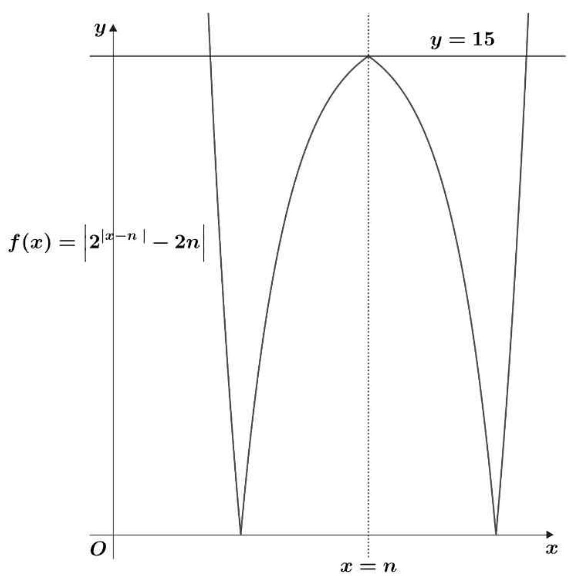
〔$n=1$, 2일 때〕



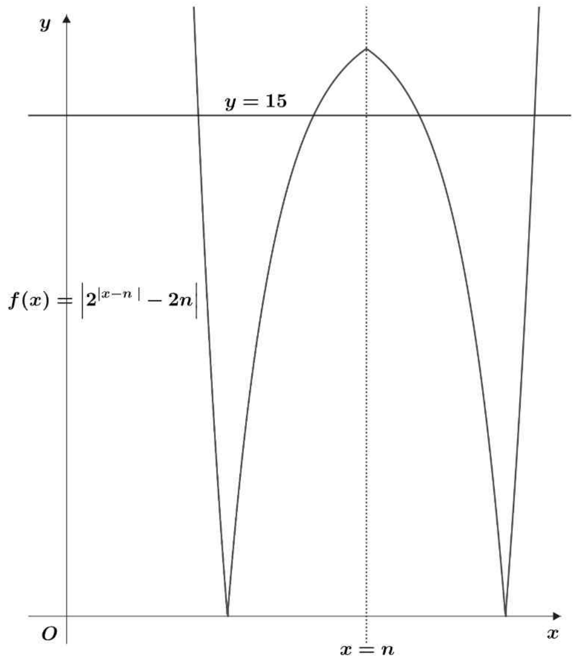
〔$n=3$, 4일 때〕



〔$n=5$, 6, 7일 때〕



〔$n=8$일 때〕



〔$n \geq 9$일 때〕

$n=1$, 2, 3, 4일 때 $a_n=1$
$n=5$, 6, 7일 때 $a_n=2$
$n=8$일 때 $a_n=3$
$n \geq 9$일 때 $a_n=4$이므로
$\sum_{n=1}^{20} a_n = 1\times4+2\times3+3+4\times12=61$

④

15. 실수 a, b, c, d에 대하여, 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$

(나) $\int_{-1}^{1} xf(x)dx=0$

함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $abcd \geq 0$

ㄴ. $ab<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,0)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

ㄷ. $ab>0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$이므로
조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(bx^2+d)dx=2\int_{0}^{1}(bx^2+d)dx=2\left[\frac{b}{3}x^3+dx\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{b}{3}+d\right)=0$$

$$d=-\frac{1}{3}b$$

조건 (가)에 의하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^4+cx^2)dx=2\int_{0}^{1}(ax^4+cx^2)dx=2\left[\frac{a}{5}x^5+\frac{c}{3}x^3\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{a}{5}+\frac{c}{3}\right)=0$$

$$c=-\frac{3}{5}a$$

ㄱ. $abcd=\frac{1}{5}a^2b^2 \geq 0$ (참)

ㄴ. $f(-1)=-a+b-c+d=-\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b$

$f(0)=d$

$$f(-1)\times f(0)=\left(-\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)\times d=\left(-\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)\times\left(-\frac{1}{3}b\right)$$

$$=\frac{2}{15}ab-\frac{2}{9}b^2<0$$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1,0]$에서 연속이고
$f(-1)\times f(0)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1,0)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $f(0)=d$

$f(1)=a+b+c+d=\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b$

$$f(0)\times f(1)=d\times\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)=-\frac{1}{3}b\times\left(\frac{2}{5}a+\frac{2}{3}b\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}ab+\frac{2}{3}b^2\right)<0$$

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속이고 $f(0)\times f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 적어도 한 개의 실근을 갖는다.

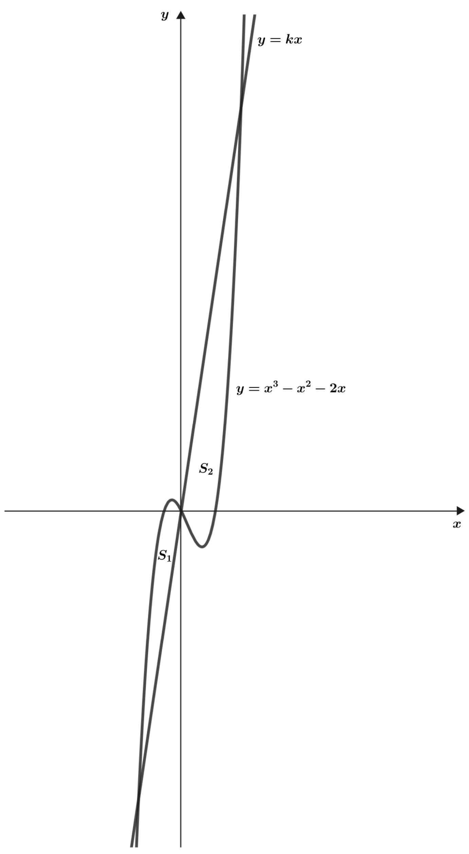
또한 방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 각각 α, β, γ라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta+r=-\frac{b}{a}<0,\ \alpha\beta r=-\frac{d}{a}=\frac{b}{3a}>0$$

열린 구간 $(0,1)$에서 존재한 한 실근을 α라 가정하면
$\beta+r<0$, $\beta r>0$ 이므로
β, γ는 음의 실근이거나 허근이다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0,1)$에서 오직 한 개의 실근을 갖는다. (참)

⑤

16. 다음 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-2x$의 그래프와 직선 $y=kx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $S_2-S_1=18$일 때, 실수 k의 값은?



① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{25}{4}$
④ $\frac{27}{4}$ ⑤ $\frac{29}{4}$

삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-2x$와 직선 $y=kx$이 만나는 점의 x좌표는 $x^3-x^2-2x=kx$, $x^3-x^2-2x-kx=0$,
$x(x^2-x-2-k)=0$
이차방정식 $x^2-x-2-k=0$의 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 $x^2-x-2-k=(x-\alpha)(x-\beta)$이고 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-2-k$ …… ㉠
$x=\alpha$, $x=0$, $x=\beta$
함수 $f(x)=x^3-x^2-2x$와 직선 $y=kx$는 세 점 $(\alpha, k\alpha)$, $(0,0)$, $(\beta, k\beta)$에서만 만나고
$\alpha\le x\le 0$에서 $f(x)\ge kx$
$0\le x\le\beta$에서 $f(x)\le kx$이다.

따라서 $S_1=\int_\alpha^0\{f(x)-kx\}dx$, $S_2=\int_0^\beta\{kx-f(x)\}dx$이고

$$S_2-S_1=\int_0^\beta\{kx-f(x)\}dx-\int_\alpha^0\{f(x)-kx\}dx$$
$$=\int_0^\beta\{kx-f(x)\}dx+\int_\alpha^0\{kx-f(x)\}dx$$
$$=\int_\alpha^\beta\{kx-f(x)\}dx=-\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha+\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2(x-\beta)+\alpha(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$$
$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)dx-\alpha\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4-\alpha\times\left\{-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\right\}=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3\{(\beta-\alpha)+2\alpha\}$$
$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3(\alpha+\beta)=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=18$$

$(\beta-\alpha)^3=12\times18=2^3\times3^3=6^3$
$\beta-\alpha=6$이고 ㉠에서 $\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-2-k$이므로
$6^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1-4(-2-k)$
$k=\frac{27}{4}$

④

17. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x\ge 1)\end{cases}$이라 하자. 양수 b에 대하여 함수 $g(x)=|x(x-2)|\int_b^x f(t)dt$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $a+b$의 최댓값은?

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{29}{6}$ ③ 5
④ $\frac{31}{6}$ ⑤ $\frac{16}{3}$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=0$이므로 함수 $f(x)$는 연속함수이다.

따라서 $\int_b^x f(t)dt$는 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다.

$|x(x-2)|$는 $x=0$과 $x=2$에서 연속이지만 미분 불가능한 함수이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$일 때 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{x(x-2)\int_b^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0-}(x-2)\int_b^x f(t)dt$$

$$=-2\int_b^0 f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x(x-2)\int_b^x f(t)dt}{x}$$

$=\lim_{x\to 0+}\left\{-(x-2)\int_b^x f(t)dt\right\}=2\int_b^0 f(t)dt$이므로

$-2\int_b^0 f(t)dt=2\int_b^0 f(t)dt$, 즉 $\int_b^0 f(t)dt=0$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-x(x-2)\int_b^x f(t)dt}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(-x)\int_b^x f(t)dt$$

$$=-2\int_b^2 f(t)dt$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x(x-2)\int_b^x f(t)dt}{x-2}=\lim_{x\to 2-}x\int_b^x f(t)dt$$

$=2\int_b^2 f(t)dt$이므로

$2\int_b^2 f(t)dt=2\int_b^2 f(t)dt$, 즉 $\int_b^2 f(t)dt=0$

$\int_b^0 f(t)dt=-\int_0^b f(t)dt=0$이므로

$\int_0^b f(t)dt=0$, $\int_b^2 f(t)dt=0$이고

$\int_0^b f(t)dt+\int_b^2 f(t)dt=\int_0^2 f(t)dt=0$

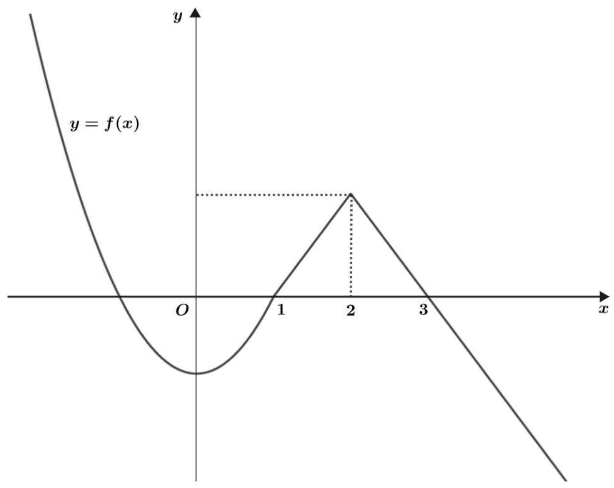
$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (x<1) \\ a-a|x-2| & (x\ge 1)\end{cases}$이므로

$$\int_0^2 f(t)dt=\int_0^1(t^2-1)dt+\int_1^2\{a+a(t-2)\}dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-t\right]_0^1+\left[\frac{a}{2}t^2-at\right]_1^2=\left(\frac{1}{3}-1\right)-0+0-\left(\frac{a}{2}-a\right)=-\frac{2}{3}+\frac{a}{2}=0$$

즉, $a=\frac{4}{3}$

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$\int_0^2 f(t)dt=0$이므로 $\int_0^b f(t)dt=0$에서 $b=2$

또한 $x\ge 2$일 때 $f(x)=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}(x-2)=-\frac{4}{3}(x-3)$

$\int_2^4 f(t)dt=0$에서

$\int_0^2 f(t)dt+\int_2^4 f(t)dt=\int_0^4 f(t)dt=0$이므로 $b=4$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=\frac{4}{3}$, $b=4$일 때

$\frac{4}{3}+4=\frac{16}{3}$

⑤

18. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{g(x)} & (x \neq 2) \\ 3 & (x=2) \end{cases}$가

실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to\infty} h(x)=3$이고 $\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{h(x)}=\infty$이다.
> (나) 방정식 $h(x)=12$가 오직 하나의 실근을 가진다.

$h(0)$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$
④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(2)=3$이고 $x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 함숫값이 존재하므로 $g(x)\neq 0$이다.
삼차함수 $g(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 방정식 $g(x)=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $g(2)=0$임을 알 수 있다.
또한, $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$에서 $x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.
따라서 $f(2)=0$
조건 (가)에서 $\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=3$이므로
$g(x)$의 최고차항의 계수를 $k(k\neq 0)$라 하면 $f(x)$의 최고차항의 계수는 $3k$이다.
$\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{h(x)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$이므로 $f(1)=0$임을 알 수 있고
$g(1)\neq 0$이므로 $x=1$좌우에서 $g(x)$의 부호 변화가 없음을 알 수 있다. 따라서 $\lim_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\infty$이므로 $f(x)$도 $x=1$좌우에서 부호 변화다는 것을 알수 있다. 따라서 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다. $f(x)=3k(x-1)^2(x-2)$, $g(x)=k(x-2)(x^2+ax+b)$(a, b는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{3k(x-2)(x-1)^2}{k(x-2)(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-1)^2}{(x^2+ax+b)}$$
$$=\frac{3}{4+2a+b}=3$$

$4+2a+b=1$, $b=-2a-3$ …… ㉠
조건 (나)에서 방정식 $h(x)=12$가 오직 하나의 실근을 갖고 $h(2)=3$이므로 방정식 $h(x)=12$에서 $x=2$임을 알 수 있다.
따라서 $\dfrac{3(x-2)(x-1)^2}{(x-2)(x^2+ax+b)}=\dfrac{3(x-1)^2}{x^2+ax+b}=12$
$(x-1)^2=4(x^2+ax+b)$, $3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$는 오직 하나의 실근을 가지므로 이차방정식
$3x^2+2(2a+1)x-8a-13=0$의 판별식을 D_1라 하면
$\dfrac{D_1}{4}=(2a+1)^2-3(-8a-13)=0$
$4a^2+28a+40=0$, $a^2+7a+10=0$
$(a+2)(a+5)=0$
$a=-2$ 또는 $a=-5$
$x\neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 함숫값이 존재하므로
$g(x)\neq 0$이므로 $g(x)=k(x-2)(x^2+ax-2a-3)$에서
이차방정식 $x^2+ax-2a-3=0$의 실근은 존재하지 않는다.
이차방정식 $x^2+ax-2a-3=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=a^2-4(-2a-3)<0$
$a^2+8a+12=(a+2)(a+6)<0$
$-6<a<-2$여야 하므로 $a=-5$, $b=7$
따라서 $x\neq 2$일 때 $h(x)=\dfrac{3(x-1)^2}{x^2-5x+7}$이므로
$h(0)=\dfrac{3}{7}$

③

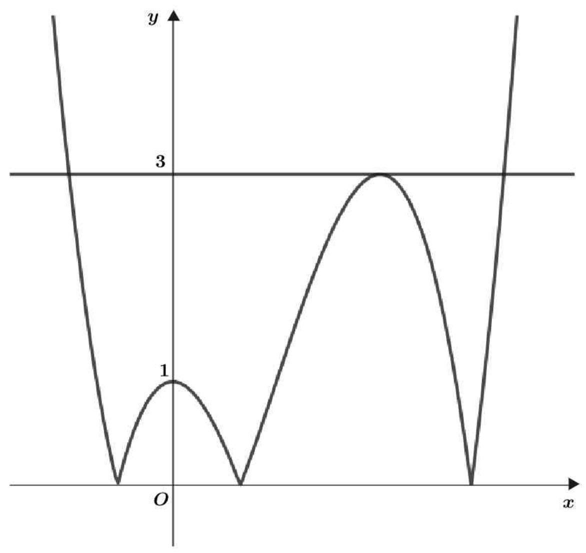
19. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)|-f'(x)$라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다음을 만족시킨다.

> (가) $g(0)=f(0)=1$
> (나) 방정식 $|f(x)|=3$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (다) 함수 $g(x)$가 $x=k$에서 미분불가능한 실수 k의 개수는 3이다.

$g(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1
④ 4　⑤ 7

조건 (가)에서 $g(0)=f(0)=1$이므로
$g(x)=|f(x)|-f'(x)$에서 $x=0$을 대입하면 $f'(0)=0$이다.
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이다. 따라서 조건 (다)에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3임을 알 수 있고 $f'(0)=0$이고, $f(0)=1$이므로 조건 (나)를 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$의 극솟값이 -3이어야 한다.



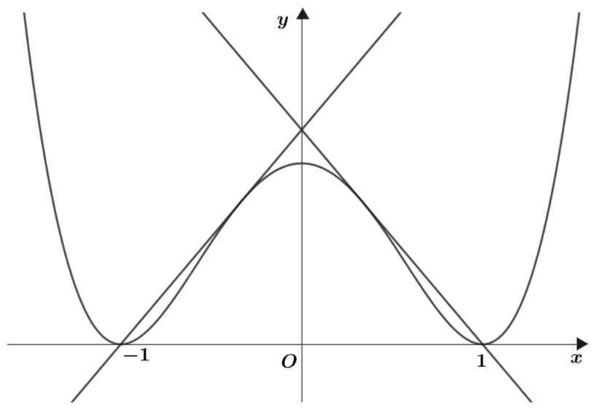
$f'(x)=3x(x-\alpha)=3x^2-3\alpha x$($\alpha$는 $\alpha>0$인 상수)
$f(x)=\int f'(x)dx=\int(3x^2-3\alpha x)dx=x^3-\frac{3\alpha}{2}x^2+C$(단, C는 적분상수)
$f(0)=1$이므로 $C=1$
$f(\alpha)=-3$이므로 $\alpha^3-\frac{3}{2}\alpha^3+1=-3\alpha^3-8=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4)=0$
$\alpha^2+2\alpha+4=(\alpha+1)^2+3>0$이므로 $\alpha=2$
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+1$이고
$g(x)=|x^3-3x^2+1|-(3x^2-6x)$
$g(1)=|1-3+1|-(3-6)=4$

④

20. 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x+1)^2(x-1)^2$이라 하자. $-1\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$를 만족시키도록 하는 실수 t의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

함수 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$은 함수 $y=f(x)$의 한 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식이므로 $-1\le x\le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$을 만족시키려면 다음과 같은 위치관계여야 한다.



따라서 실수 t의 최댓값은 함수 $y=f(x)$의 한 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식이 $(1,0)$을 지날 때이고
함수 $y=f(x)$의 한 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(t)=f'(t)(x-t)$이고 이 직선은 $(1,0)$을 지나므로
실수 t의 최댓값은 방정식 $-f(t)=f'(t)(x-t)$의 실근 중에서 구간 $0<t<1$에 있을 때이다.
$f(t)=\{(t+1)(t-1)\}^2$에서
$f'(t)=4t^3-4t$
$-(t+1)^2(t-1)^2=(4t^3-4t)(1-t)=4t(t-1)(t+1)(1-t)$
$(t+1)^2(t-1)^2=4t(t-1)^2(t+1)$
$(t-1)^2(t+1)\{4t-(t+1)\}=0\,(t-1)^2(t+1)(3t-1)=0$
실수 t의 최댓값은 $0<t<1$구간에 있을 때이므로
실수 t의 최댓값은 $\frac{1}{3}$이다.

②

21. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1의 값을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{은 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \end{cases}$

(나) $a_5=1$

$a_5=1$이므로

$a_4=2$이고

$a_4=2$이므로 $a_3=1$또는 $a_3=4$이다.

(i) $a_3=1$인 경우

$a_2=2$이고 $a_1=1$또는 $a_1=4$

(ii) $a_3=4$인 경우

$a_2=3$ 또는 $a_2=8$

(ii) - ① $a_2=3$인 경우

$a_1=6$

(ii) - ② $a_2=8$

$a_1=7$ 또는 $a_1=16$

(i) , (ii)에서 모든 a_1의 값의 합은

$1+4+6+7+16=34$

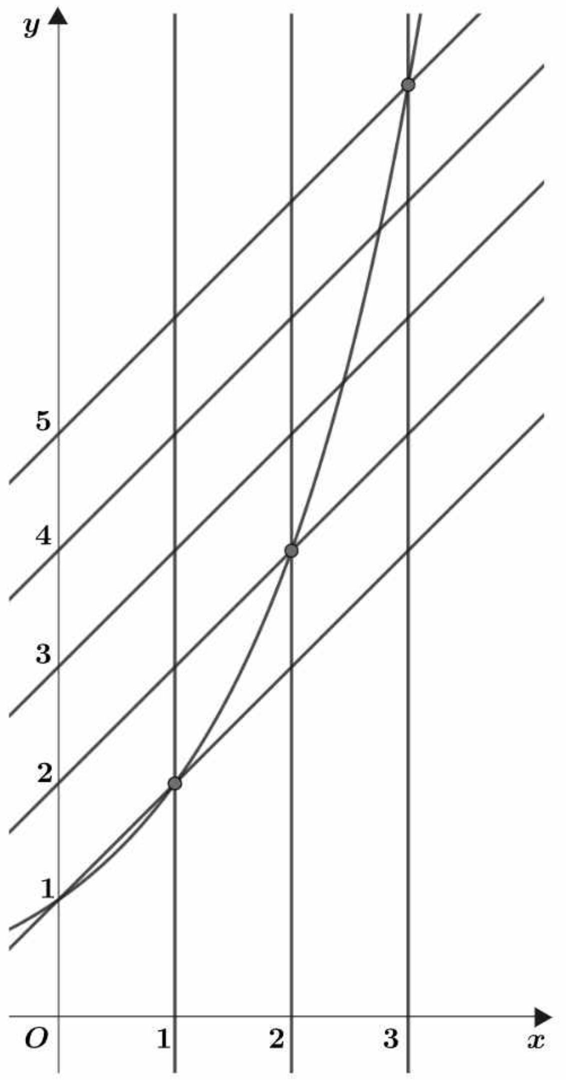
34

22. 자연수 n에 대하여 집합 $\{x|x\le \log_2(x+n),\ x\text{는 자연수}\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}f(n)$의 값을 구하시오.

$x\le \log_2(x+n)$에서 $x\log_2 2\le \log_2(x+n)$

$2^x\le x+n$

곡선 $y=2^x$의 그래프와 $y=x+1$, $y=x+2$, $y=x+3$, $y=x+4$, $y=x+5$의 그래프는 다음과 같다.



곡선 $y=2^x$의 그래프와 $y=x+1$은 $(1,2)$에서 만나고

곡선 $y=2^x$의 그래프와 $y=x+2$는 $(2,4)$에서 만나고

곡선 $y=2^x$의 그래프와 $y=x+5$는 $(3,8)$에서 만난다.

이와 같은 방법으로 생각해보면 기울기가 1이면서 $(4,16)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=x+12$

기울기가 1이면서 $(5,32)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=x+27$이므로

$f(1)=1$

$f(2)=f(3)=f(4)=2$

$f(5)=f(6)=f(7)=\cdots=f(11)=3$

$f(12)=f(13)=f(14)=\cdots=f(20)=4$

임을 알 수 있다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}f(n)=1\times1+2\times3+3\times7+4\times9=64$

64

23. 다항함수 f, g가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(0)=5$, $f(x-g(y))=\left(x+4y^2-1\right)^3-3$을 만족시킬 때, 함수 $h(x)=f(x)-g(x)$의 극댓값을 구하시오.

$f(0)=5$이므로 $f(x-g(y))=\left(x+4y^2-1\right)^3-3$에
$y=0$을 대입해보면
$f(x-g(0))=(x-1)^3-3$이다.
$k(x)=(x-1)^3-3$이라 하면 $k'(x)=3(x-1)^2\geq 0$이므로 $k(x)$는
일대일대응이고 $h(3)=(3-1)^3-3=5$이므로
$f(3-g(0))=5$에서 $g(0)=3$
따라서 $f(x-3)=(x-1)^3-3$에서
$f(x)=(x+2)^3-3$
$f(x-g(y))=\left(x+4y^2-1\right)^3-3$에 $x=g(y)$를 대입해보면
$f(0)=\left\{g(y)+4y^2-1\right\}^3-3=5$
$\left[\left\{g(y)+4y^2-1\right\}-2\right]\times\left[\left\{g(y)+4y^2-1\right\}^2+2\left\{g(y)+4y^2-1\right\}+4\right]=0$
$\left[\left\{g(y)+4y^2-1\right\}+1\right]^2+3>0$이므로
$\left\{g(y)+4y^2-1\right\}-2=0$에서
$g(y)=3-4y^2$
따라서 $h(x)=f(x)-g(x)=(x+2)^3-3-\left(3-4x^2\right)$
$=x^3+10x^2+12x+2$
$h'(x)=3x^2+20x+12=(3x+2)(x+6)$
$h'(x)=0$에서 $x=-6$또는 $x=-\dfrac{2}{3}$이므로
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

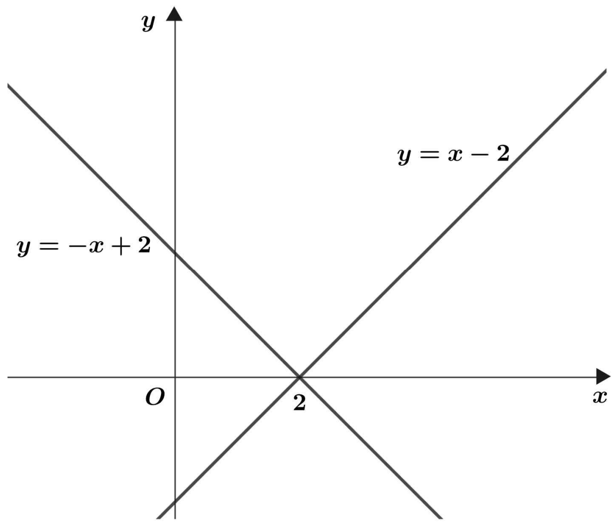
따라서 함수 $h(x)$는 $x=-6$에서 극대이므로 극댓값은
$h(-6)=(-6)^3+10\times(-6)^2+12\times(-6)+2$
$=74$

74

24. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$의 값을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $\{f'(x)+2\}\{f'(x)-2\}=x(x-4)$이다.
> (나) $f(0)<f(4)$, $f(2)=1$

모든 실수 x에 대하여 $\{f'(x)+2\}\{f'(x)-2\}=x(x-4)$이므로
$\{f'(x)\}=x^2-4x+4=(x-2)^2$에서
$f'(x)=x-2$ 또는 $f'(x)=2-x$
실수 전체의 집합에서 도함수가 연속이므로 $x=2$에서만
도함수가 달라질 수 있다.



$f(0)<f(4)$이므로 $f'(x)=\begin{cases}2-x & (x<2)\\ x-2 & (x\geq 2)\end{cases}$이고
$f(2)=1$이므로
$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+2x-1 & (x<2)\\ \dfrac{1}{2}x^2-2x+3 & (x\geq 2)\end{cases}$이다.

$\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}x^2+2x-1\right)dx+\int_2^4\left(\frac{1}{2}x^2-2x+3\right)dx$
$=\left[-\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x\right]_0^2+\left[\dfrac{1}{6}x^3-x^2+3x\right]_2^4$
$=\left(-\dfrac{4}{3}+4-2\right)-0+\left(\dfrac{32}{3}-16+12\right)-\left(\dfrac{4}{3}-4+6\right)$
$=4$

4

25. 함수 $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n}{n}\right)$일 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n=p+q\sqrt{2}$이다. 정수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

$f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$에서

$f(1-x)=\dfrac{2^{1-x}}{2^{1-x}+\sqrt{2}}=\dfrac{2}{2+\sqrt{2}\times 2^x}=\dfrac{\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}$이므로

$f(x)+f(1-x)=1$이다.

$a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n}{n}\right)$에서

$f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)=1$, $f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{n-2}{n}\right)=1$, $f\left(\dfrac{3}{n}\right)+f\left(\dfrac{n-3}{n}\right)=1$,

$\cdots$이므로

$a_n=\dfrac{n-1}{2}+f(1)=\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$=\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{2(2-\sqrt{2})}{2}=\dfrac{n-1}{2}+2-\sqrt{2}=\dfrac{n}{2}+\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{20}n+\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{20(20+1)}{2}+20\times\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)=105+30-20\sqrt{2}=135-20\sqrt{2}$

따라서 $p=135$, $q=-20$이므로

$p+q=135+(-20)=115$

115

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.