수학 영역

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$\left(5^{1-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5}$

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x+1$

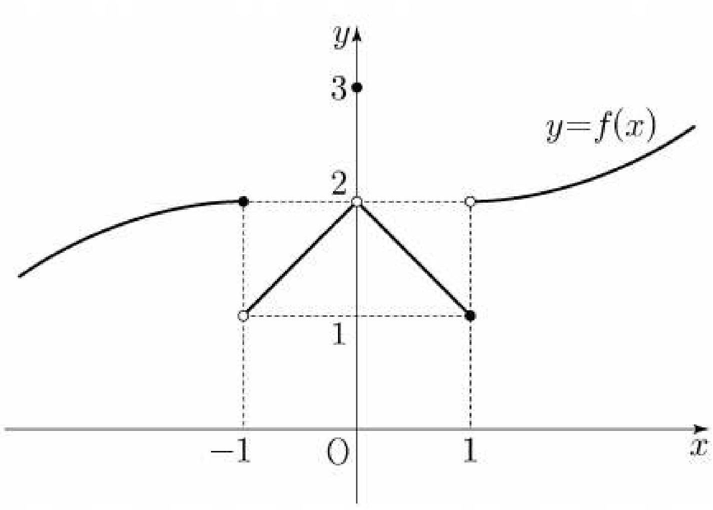
$f'(2)=5$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$S_5=4,\ S_6=S_5+a_6=8$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 0+}f(x)=2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=1$

$2+1=3$

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x)=2x(x^2+2x+2)+(x^2-1)(2x+2)$

$f'(1)=10$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$

7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

$f(x)=x^3-3x^2-9x+k$

$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x+1)(x-3)$

$f(-1)=5+k=0,\ k=-5$

$f(3)=-27+k=0,\ k=27$

22

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=16,\ 2a_8-3a_7=32$ 일 때, a_9+a_{11}의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2\times16r^2-3\times16r=32$
$(2r+1)(r-2)=0$

$a_1a_2<0$
$r<0,\ r=-\frac{1}{2}$

$a_9+a_{11}=16(r^3+r^5)=-\frac{5}{2}$

9. 함수 $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\geq 0)\end{cases}$ 에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은?

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

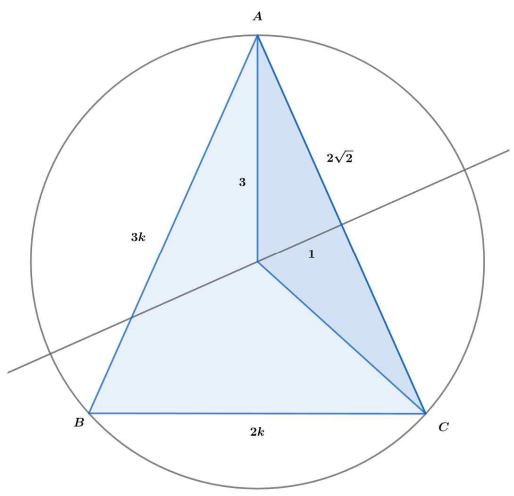
$\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=(a+3)^2$

$a=-\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$



$k=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\frac{1}{2}\times2k\times2\sqrt{2}k=\frac{64\sqrt{2}}{9}$

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-1}{x-a}=3$을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(a)=1,\ f'(a)=3$

$y-1=3(x-a)$

$a=-1$

$f(x)=x^3+px^2+qx$

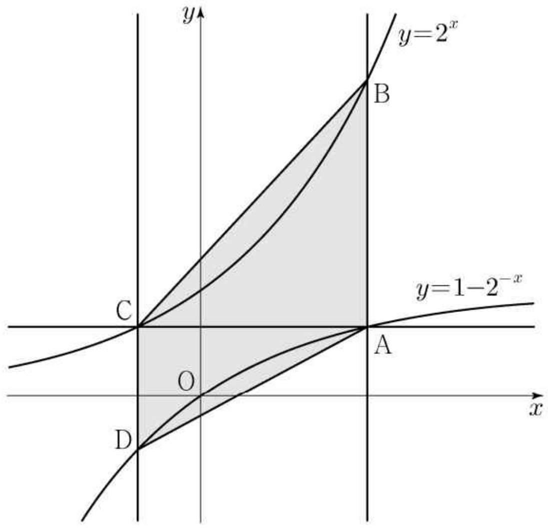
$f(-1)=-1+p-q=1$
$f'(-1)=3-2p+q=3$

$p=-2,\ q=-4$

$f(x)=x^3-2x^2-4x$

$f(1)=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$
④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

$C(\log_2 k,\ k),\ A(-\log_2(1-k),\ k)$
$D\left(\log_2 k,\ 1-\frac{1}{k}\right),\ B\left(-\log_2(1-k),\ \frac{1}{1-k}\right)$

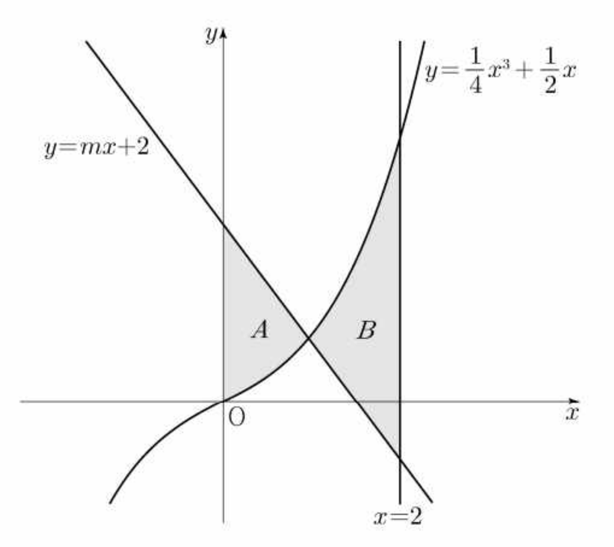
$\frac{1}{1-k}-k=2\left(k-1+\frac{1}{k}\right)$

$\frac{1-k+k^2}{1-k}=2\times\frac{k^2-k+1}{k},$
$k=2(1-k),\ k=\frac{2}{3}$

$C\left(\log_2\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ A\left(\log_2 3,\ \frac{2}{3}\right)$
$D\left(\log_2\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$
$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)$
$=\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}\times\left(\log_2\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$)

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



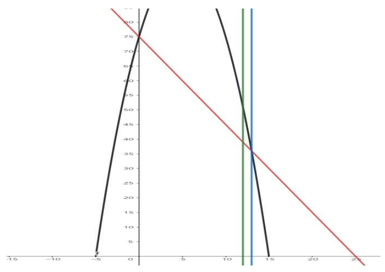
$\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x-mx-2\right)dx$
$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}mx^2-2x\right]_0^2$
$=2-2m-4=\frac{2}{3}$, $m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

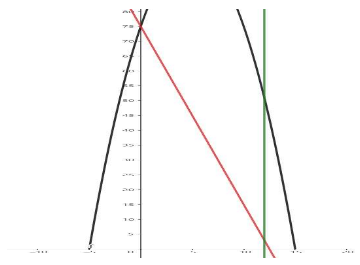
$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-n^2+10n+75>75-kn$



$n=12$, $-n^2+10n+75>75-kn$
$n=13$, $-n^2+10n+75\le 75-kn$
$k=3$



$n=12$, $75-kn>0$
$n=13$, $75-kn\le 0$

$k=6$

$3+6=9$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 k에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \le k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \ge 0$이고
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \ge 0$ 이다.

$g(k+1)$의 최솟값은?

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$
④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

$f(x)-(2x-k)=(x-k)^2(x-\alpha)$

조건 나에서

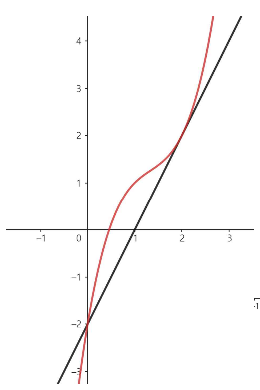
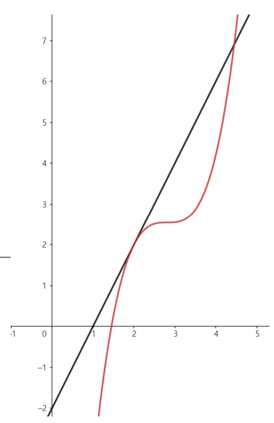
$\begin{cases} t<0 & g(t)\le 0 \\ 0 \le t < 1 & \\ t \ge 1 & g(t) \ge 0 \end{cases}$ $\quad\begin{cases} t<-2 & \\ -2 \le t \le 1 & g(t)\le 0 \\ t \ge 1 & \end{cases}$

$g(1)=0$

$f(x)>0 \ (x \ge k)$

$2-k=0$

$k=2$

위의 두가지 케이스가 있을 수 있고 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로

$f'(x)=2(x-2)(x-\alpha)+(x-2)^2+2$
$=3x^2-2(4+\alpha)x+4\alpha+6$

$D/4=\alpha^2-4\alpha-2 \le 0$

$2-\sqrt{6} \le \alpha \le 2+\sqrt{6}$

$g(3)=f(3)=7-\alpha$ 이므로
$g(3)$의 최솟값은 $5-\sqrt{6}$

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>3$

$\log_2(x+1)(x-3)=5$

$(x+1)(x-3)=32$

$x=7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$ 이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

$f(x)=2x^3+2x+3$

$f(2)=23$

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$285a-450=120$

$a=2$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\leq t\leq 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오.

$\int_0^3(-t^2+t+2)dt$

$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3$

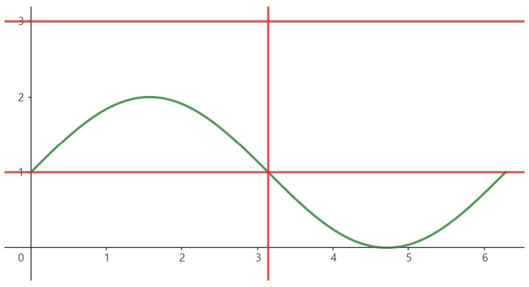
$=\frac{3}{2}$

$\frac{1}{2}\times 4\times p=\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{4}$

$k\left(3+\frac{1}{4}-3\right)-4=0,\ k=16$

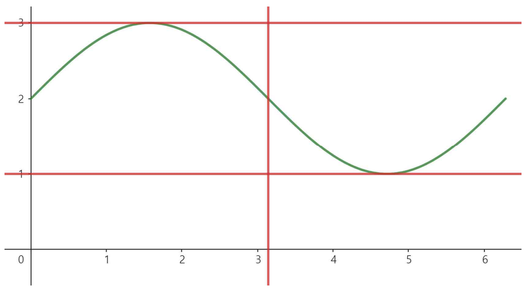
20. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y = a\sin x + b$의 그래프가 직선 $x = \pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y = 1, y = 3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a + b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

$a = 1, b = 1$

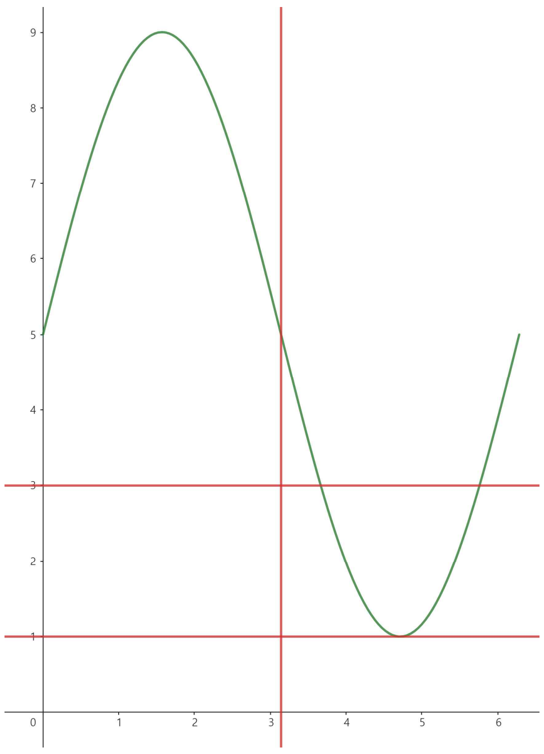


열린구간 $(0, 2\pi)$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

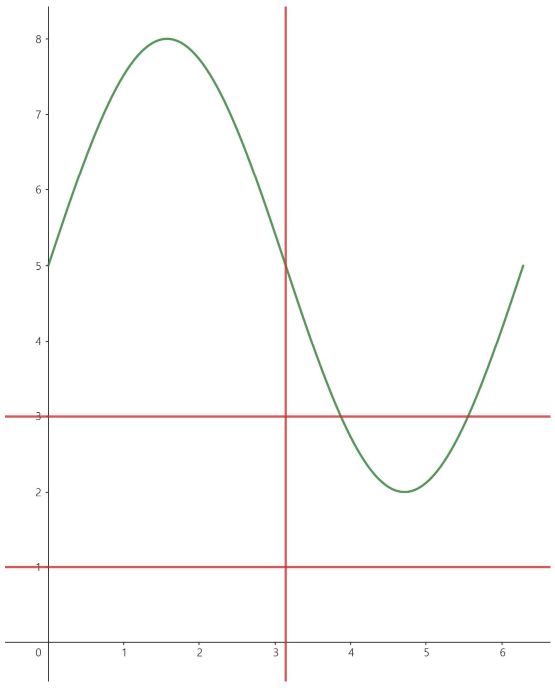
$a = 1, b = 2$



$a = 4, b = 5$



$a = 3, b = 5$



21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(a)\le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
(나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0,\ f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오.

$f'(2)=0$ 이고 극솟값 중 큰 값은 $\frac{8}{3}$

$f(0)=0,\ f'(1)=0$ 이므로

$f(2)=\frac{8}{3}$

$f(x)=(x-2)^2(x^2+ax+b)+\frac{8}{3}$

$f(0)=4b+\frac{8}{3}=0,\ b=-\frac{2}{3}$

$f'(x)=2(x-2)\left(x^2+ax-\frac{2}{3}\right)+(x-2)^2(2x+a)$

$f'(1)=-2\left(\frac{1}{3}+a\right)+2+a=0,\ a=\frac{4}{3}$

$f(x)=(x-2)^2\left(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}$

$f(3)=9+4+2=15$

22. 수열 $\{a_n\}$은 $a_2=-a_1$이고, $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\sqrt{n}\times a_{\sqrt{n}} & \left(\begin{array}{l}\sqrt{n}\text{이 자연수이고}\\ a_n>0\text{인 경우}\end{array}\right) \\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

$n=4,\ n=9$일 때 주의 하면 된다.

$a_{10}=-4$

$a_2=a$라 하면 $a_4=a+2$

	a_5	a_9		a_{10}
$a+2>0$	$a_4-2a_2=2-a$	$6-a$	$6-a>0$	$a_9-3a_3=3-4a$
			$6-a\le 0$	$7-a$
$a+2\le 0$	$a+3$	$a+7$	$a+7>0$	$a_9-3a_3=4-2a$
			$a+7\le 0$	$a+8$

1) $3-4a=-4,\ a=\frac{7}{4}$

2) $7-a=-4,\ a=11$

3) $4-2a=-4,\ a=4$

$a+2\le 0$여야 하므로 문제의 조건에 맞지 않다.

4) $a+8=-4,\ a=-12$

$a_1=12$ or -11 or $-\frac{7}{4}$

$12\times 11\times\frac{7}{4}=231$

23. 네 개의 숫자 $1, 1, 2, 3$을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\frac{4!}{2!} = 12$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고 $P(A^C) = \frac{5}{6}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$일 때, $P(B^C)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건이다.)

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

$P(A \cap B) = 0$

$P(A) = 1 - P(A^C) = \frac{1}{6}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

$\therefore P(B^C) = 1 - P(B) = \frac{5}{12}$

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는?

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

${}_5C_3(-2)^2=40$

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은?

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는 $4^4=256$

문자 a가 한 개 포함되는 경우의 수

4×3^3

문자 b가 한 개 포함되는 경우의 수

4×3^3

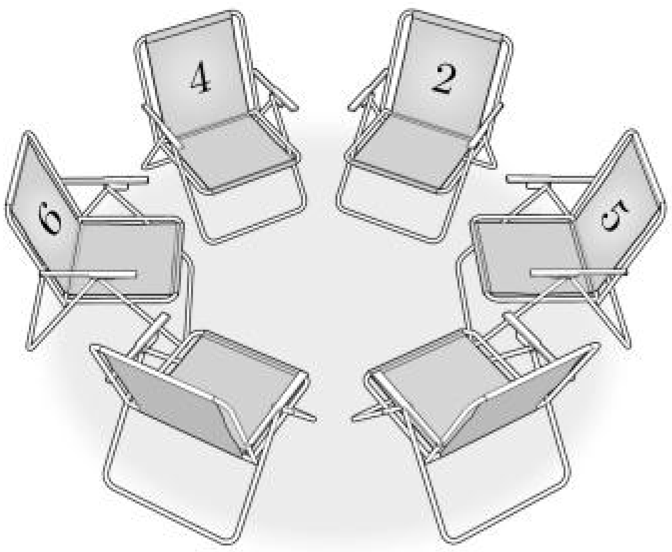
문자 a와 문자 b가 각각 한 개 포함되는 경우의 수

$4\times3\times2^2$

$$\frac{2\times4\times3^3-4\times3\times2^2}{256}=\frac{21}{32}$$

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 1가 되지 않도록 배열하는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.)

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



$\frac{6!}{6}-\frac{5!}{5}\times 2=72$

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은?

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$

1번 시행	2번 시행	3번 시행	4번 시행	5번 시행
앞2 뒤2	앞3 뒤1	앞2 뒤2	앞3 뒤1	앞4
			앞1 뒤3	뒤4
		앞4	앞3 뒤1	앞4
	앞1 뒤3	앞2 뒤2	앞3 뒤1	앞4
			앞1 뒤3	뒤4
		뒤4	앞1 뒤3	뒤4
앞4	앞3 뒤1	앞2 뒤2	앞3 뒤1	앞4
			앞1 뒤3	뒤4
		앞4	앞3 뒤1	앞4

$3\times2\times3\times2\times1=36$
$3\times2\times3\times2\times1=36$
$3\times2\times1\times4\times1=24$
$3\times2\times3\times2\times1=36$
$3\times2\times3\times2\times1=36$
$3\times2\times1\times4\times1=24$

$1\times4\times3\times2\times1=24$
$1\times4\times3\times2\times1=24$
$1\times4\times1\times4\times1=16$

$\frac{36\times2+24\times2+16}{36\times4+24\times4+16}=\frac{17}{32}$

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자. $p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$)

흰 공의 개수를 n개라 하면 검은 공의 개수는 $40-n$개이므로

$p=\frac{{}_{n}C_{2}}{{}_{40}C_{2}}, q=\frac{{}_{n}C_{1}\times{}_{40-n}C_{1}}{{}_{40}C_{2}}$

$\frac{n(n-1)}{2}=n(40-n), n=27$

$r=\frac{{}_{13}C_{2}}{{}_{40}C_{2}}=\frac{13\times12}{40\times39}=\frac{1}{10}$

$60r=6$

30. 집합 $X=\{-2,-1,0,1,2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오.

> (가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x)\in X$이다.
> (나) $x=-2,-1,0,1$일 때 $f(x)\geq f(x+1)$이다.

조건 (나)에 의하여 $f(-2)\geq f(-1)\geq f(0)\geq f(1)\geq f(2)$이므로

${}_{5}H_{5}=126$

조건 (가)에 의하여

$-2\leq 2+f(2)\leq 2$이므로 $f(2)\leq 0$

$-2\leq 1+f(1)\leq 2$이므로 $f(1)\leq 1$

$-2\leq 0+f(0)\leq 2$이므로 $f(0)\leq 2$

$-2\leq -1+f(-1)\leq 2$이므로 $-1\leq f(-1)$

$-2\leq -2+f(-2)$이므로 $f(-2)\geq 0$

$f(-2)=-2$인 경우

1가지

$f(-2)=-1$인 경우

${}_{2}H_{4}=5$

$f(-2)\geq 0$이고 $f(-1)=-2$인 경우

3가지

$f(2)=2$인 경우

1가지

$f(2)=1$인 경우

${}_{2}H_{4}=5$

$f(1)=2$이고 $f(2)\leq 0$인 경우

3가지

$126-(1+5+3+1+5+3)=108$

> ※ 확인사항
> 문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.