

수학 영역

제 2 교시

1

1. $\sqrt[3]{7} \times 49^{\frac{1}{3}}$ 의 값은?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$$7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}} = 7^1 = 7$$

2. 함수 $f(x) = x^3 - 9x + 1$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = f'(2)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 9$$

$$f'(2) = 12 - 9 = 3$$

3. 첫째항과 공비가 모두 양수 k 인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$\frac{a_4}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = 42$$
을 만족시킬 때, k 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$k^2 + k = k(k+1) = 42$$

$$k = 6$$

4. 함수 $f(x) = \begin{cases} 4x+a & (x < -2) \\ x^2-a & (x \geq -2) \end{cases}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$-8 + a = 4 - a$$

$$2a = 12, a = 6$$

5. 함수 $f(x) = (x^2 + 3)(3x^2 - x)$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은?

- ① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

$$f'(x) = 2x(3x^2 - x) + (x^2 + 3)(6x - 1)$$

$$f'(1) = 4 + 20 = 24$$

7. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = 3x^3 - 2x$

를 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$$f(x) = 9x^2 - 2$$

$$f(1) = 7$$

6. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{4}$ 일 때, $\frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta}$ 의 값은?

- ① -4 ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ 4

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = 4$$

8. 두 실수 $a = 4\log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 40$, $b = \log 2$ 에 대하여 $a \times b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\begin{aligned} & \left(4\log\frac{1}{\sqrt{10}} + \log_2 40\right) \times \log 2 \\ &= (-2 + \log_2 40) \times \log 2 \\ &= \log_2 10 \times \log 2 = 1 \end{aligned}$$

9. 함수 $f(x) = 3x^2 - 22x - 12$ 에 대하여 $\int_{-3}^a f(x)dx = \int_{-3}^0 f(x)dx$ 일 때, 양수 a 의 값은?

- ① 16 ② 14 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^a f(x)dx - \int_{-3}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^a f(x)dx = [x^3 - 11x^2 - 12x]_0^a \\ &= a(a-12)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

$$a = 12$$

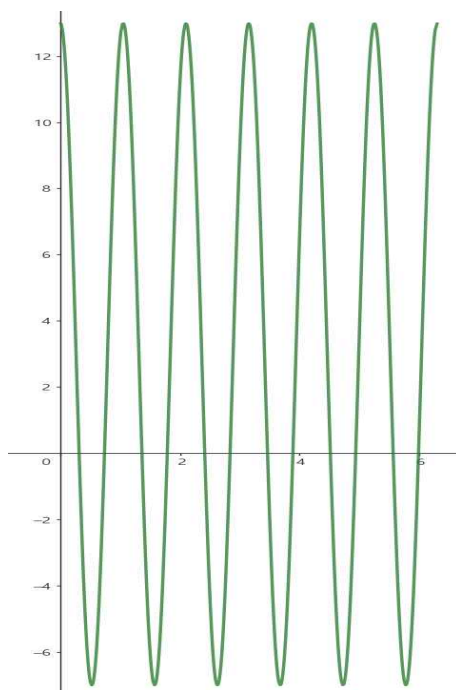
10. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$ 에서 정의된 함수 $f(x) = a \cos bx + 2$ 이 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 최댓값 10을 갖도록 하는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최솟값은?

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$a \cos \frac{\pi}{3} b + 2 = 10, a \cos \frac{\pi}{3} b = 8$$

$$a = 8, \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{6}, b = 12$$

$$a + b = 20$$



11. 시각 $t=0$ 일 때 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t \geq 0)$ 에서의 위치 x 가 $x=t^3+\frac{3}{2}t^2-6t$ 이다. 출발한 후 점 P 의 운동 방향이 바뀌는 시각에서의 점 P 의 가속도는?

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

$$v(t)=3t^2+3t-6=3(t^2+t-2) \\ =3(t-1)(t+2)$$

$$a(t)=6t+3$$

$$a(1)=9$$

12. $a_1=4$ 인 수열 $\{a_n\}$ 과 $b_1=4$ 인 등차수열 $\{b_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_{k+1}} = \frac{1}{2}n^2$ 을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^5 a_k$ 의 값은?

① 220 ② 225 ③ 230 ④ 235 ⑤ 240

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{1}{2}, b_2 = 8$$

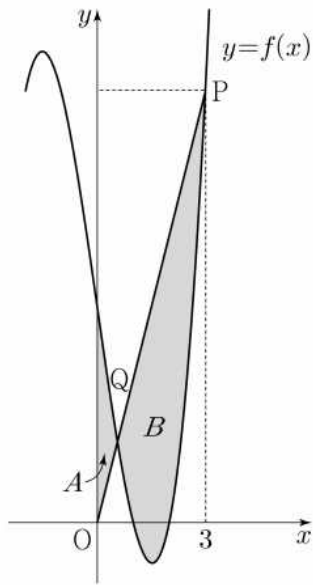
$$b_n = 4n$$

$$\frac{a_n}{b_{n+1}} = n - \frac{1}{2}, a_n = 4(n+1) \times \left(n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\sum_{k=1}^5 (4k^2 + 2k - 2) \\ = 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} - 10 = 240$$

13. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f(1)=f(2)=0, f'(0)=-16$ 을 만족시킨다. 원점 O 와 점 $P(3, f(3))$ 에 대하여 선분 OP 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점 중 P 가 아닌 점을 Q 라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 선분 OQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 A , 곡선 $y=f(x)$ 와 선분 PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 B 라 할 때, $B-A$ 의 값은?

- ① $\frac{55}{4}$ ② $\frac{57}{4}$ ③ $\frac{59}{4}$ ④ $\frac{61}{4}$ ⑤ $\frac{63}{4}$



$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-\alpha)$$

$$f'(0)=-16=3\alpha+2, \alpha=-6$$

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x+6)$$

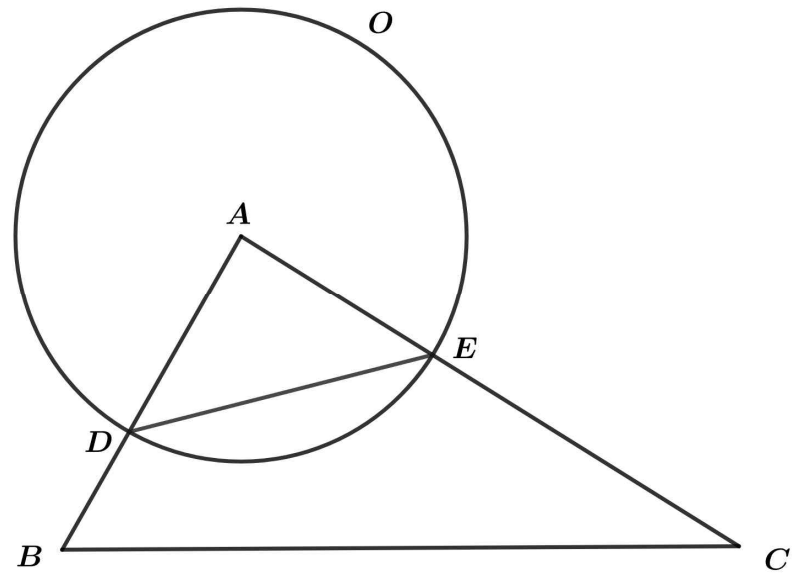
O, P 를 지나는 직선의 방정식은 $y=6x$

$B-A$

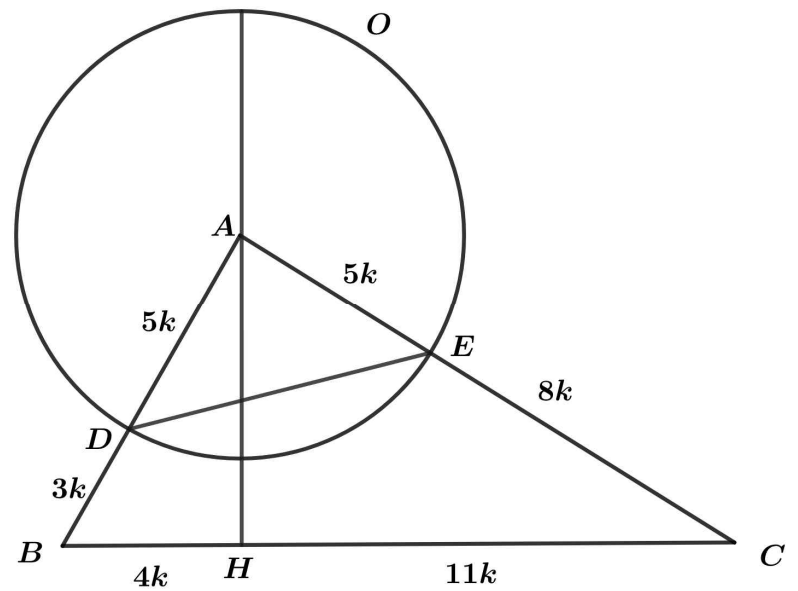
$$= \int_0^3 \{6x - (x-1)(x-2)(x+6)\} dx$$

$$= \frac{63}{4}$$

14. 그림과 같이 삼각형 ABC 에서 선분 AB 위에 $\overline{AD} : \overline{DB} = 5 : 3$ 인 점 D 를 잡고, 점 A 를 중심으로 하고 점 D 를 지나는 원을 O , 원 O 와 선분 AC 가 만나는 점을 E 라 하자. $\sin A : \sin C = 15 : 8$ 이고, 삼각형 ADE 와 삼각형 ABC 의 넓이의 비가 $25 : 104$ 이다. 삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이가 13일 때, 원 O 위의 점 P 에 대하여 삼각형 PBC 의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB} < \overline{AC}$)



- ① $\frac{43}{2}(5+4\sqrt{3})$ ② $\frac{43}{2}(4+5\sqrt{3})$ ③ $45(2+2\sqrt{3})$
 ④ $\frac{45}{2}(5+4\sqrt{3})$ ⑤ $\frac{45}{2}(4+5\sqrt{3})$



$$\cos B = \frac{64k^2 + 225k^2 - 169k^2}{2 \times 8k \times 15k} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \times (\overline{AH} + 5k) \times 15k \\ &= \frac{1}{2} \times (4\sqrt{3} + 5) \times 15k^2 \end{aligned}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{13k}{\sin B} = 26, k = \sqrt{3}$$

$$= \frac{45}{2} (5 + 4\sqrt{3})$$

15. 상수 $a(a \neq 3\sqrt{7})$ 와 최고차항의 계수가 음수인 이차함수

$$f(x) \text{에 대하여 함수 } g(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 21x + 8 & (x \leq 0) \\ f(x) & (x > 0) \end{cases} \text{이}$$

다음 조건을 만족킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) x 에 대한 방정식 $g'(x) \times g'(x-6) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

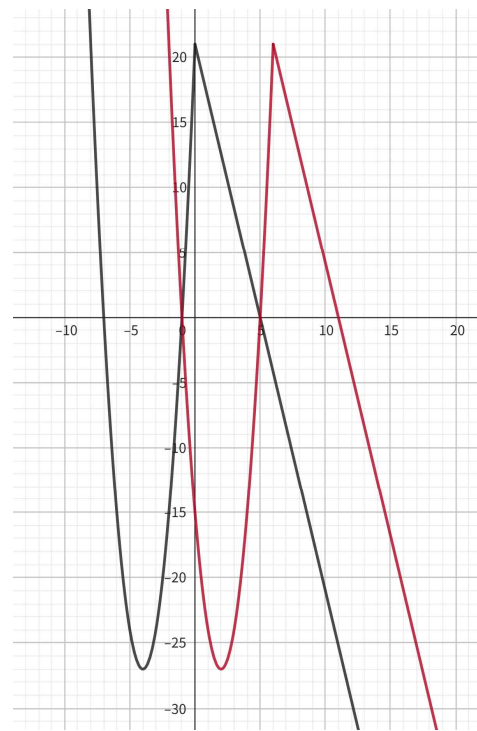
$g(-2) + g(10)$ 의 값은?

- ① 6 ② 10 ③ 14 ④ 18 ⑤ 22

$$f(x) = bx^2 + 21x + 8$$

$$g'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2ax + 21 & (x \leq 0) \\ 2bx + 21 & (x > 0) \end{cases}$$

$g'(x) \times g'(x-6) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4이고 $a \neq 3\sqrt{7}$ 이므로 함수 $g'(x)$ 와 $g'(x-4)$ 는 다음과 같은 함수의 그래프의 형태이다.



$g'(x) = 0$ 의 실근의 차가 6이므로 근과 계수와의 관계에 의해

$$\left(-\frac{2a}{3}\right)^2 - 4 \times \frac{21}{3} = 36, a = 12$$

$$g'(x) = 3(x+1)(x+7)$$

$$g'(5) = 0, b = -\frac{21}{10}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^3 + 12x^2 + 21x + 8 & (x \leq 0) \\ -\frac{21}{10}x^2 + 21x + 8 & (x > 0) \end{cases}$$

$$g(-2) + g(10) = 14$$

16. 방정식 $\log_2(x-4)=\log_4(4x-11)$ 를 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

$$x > 4$$

$$(x-4)^2 = 4x-11$$

$$x^2 - 12x + 27 = 0$$

$$x = 9$$

17. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)=9x^2+6x$ 이고 $f(1)=7$ 일 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

$$f(x)=3x^3+3x^2+1$$

$$f(2)=37$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n+a_{n+4}=16$ 를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{16}a_k$ 의 값을 구하시오.

$$a_1+a_5=16$$

$$a_2+a_6=16$$

$$a_3+a_7=16$$

$$a_4+a_8=16$$

$$\sum_{n=1}^{16}a_n=128$$

19. 양수 a 에 대하여 함수 $f(x)$ 를 $f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$ 라 하자. 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 $-\frac{20}{27}$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하시오.

$$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2x=6(x+a)(x-2a)$$

$$f(2a)=-\frac{20}{27}, a=\frac{1}{3}$$

$$f(x)=2x^3-x^2-\frac{4}{3}x$$

$$f(3)=41$$

20. 곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 과 직선 $y = x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 k 라

하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을

만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{k^4 \times 5^{4k}}\right)$ 의 값을 구하시오.

$x > k$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$ 이고 $f(f(x)) = 2x$ 이다.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k, k \times 5^k = 5^3, k^4 \times 5^{4k} = 5^{12}$$

$$f\left(\frac{1}{k^4 \times 5^{4k}}\right) = f\left(\frac{1}{5^{12}}\right)$$

$$f(15) = \left(\frac{1}{5}\right)^{12}, f(f(15)) = f\left(\frac{1}{5^{12}}\right) = 30$$

21. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(3x+2)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(3x+2)}{f(x)}$ 의 값이 존재하므로

$f(\alpha) = 0$ 이면 $f(3\alpha+2) = 0$

$\alpha \neq 3\alpha+2$ 이면

$f(\alpha) = f(3\alpha+2) = f(9\alpha+8) = \dots = 0$ 이므로
문제의 조건에 맞지 않다.

$\alpha = 3\alpha+2, \alpha = -1$

$f(-1) = 0,$
 $f(x) = (x+1)(x^2+kx+4)$

$D = k^2 - 16 < 0$

$-4 < k < 4$

$f(1) = 2(5+k)$

$f(1) = 16$

22. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $|a_1|$ 의 값의 합을 구하시오.

(가)	모든 자연수 n 에 대하여
$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (a_n \text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } a_n \text{이 짝수}) \end{cases}$	
(나)	$ a_m = a_{m+2} $ 인 자연수 m 의 최솟값은 4이다.

$$|a_4| = |a_6|$$

$$a_4 = 4k, a_6 = k, k = 0$$

$$a_3 = 3, a_2 = 6$$

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	0		
			3	6	12
					9

$a_3 = 0$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

$$a_4 = 2k, a_5 = k, a_6 = k - 3 \text{ (단, } k \text{는 홀수)}$$

$$|2k| = |k - 3|, k = -3 \text{ or } 1$$

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-6	-3	-6	-12	-24	-48
					-21
				-9	-18
			-3		
-2	1	2	4	8	16
					11
				7	14
			5	10	20
					13

$a_3 = -3$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

$$a_4 = k \text{ (단, } k \text{는 홀수)}$$

$$a_4 = k, a_5 = k - 3, a_6 = \frac{k - 3}{2}$$

$$|k| = \left| \frac{k - 3}{2} \right|, k = -3 \text{ or } 1$$

a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-3	-6	-3	-6		
-1	-2	1	2		

위의 경우 모두 조건 (나)에서 자연수 m 의 최솟값은 3이다.

$$12 + 9 + 48 + 21 + 18 + 16 + 11 + 14 + 20 + 13 = 182$$