1. $\left(3^{-1}+3^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\left(3^{-1}+3^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\frac{3+1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

2. 함수 $f(x)=3x^2-x+1$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$

$f(x)=3x^2-x+1$에서
$f'(x)=6x-1$이므로

$f'(1)=6\times 1-1=5$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.
$\dfrac{S_7-S_4}{S_3}=\dfrac{1}{9}$ 일 때, $\dfrac{a_5}{a_7}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{a_5}{a_7}=\dfrac{1}{r^2}$ 이다.

$$\frac{S_7-S_4}{S_3}=\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_7)-(a_1+a_2+a_3+a_4)}{a_1+a_2+a_3}$$

$$=\frac{a_5+a_6+a_7}{a_1+a_2+a_3}=\frac{r^4(a_1+a_2+a_3)}{a_1+a_2+a_3}=r^4=\frac{1}{9}$$

$r^2>0$이므로 $r^2=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\dfrac{a_5}{a_7}=\dfrac{1}{r^2}=3$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+2x+2)f(x)$$

라 하자. $g'(1)=10$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$g(x)=(x^3+2x+2)f(x)$에서

$g'(x)=(3x^2+2)f(x)+(x^3+2x+2)f'(x)$

$g'(1)=10$이므로

$g'(1)=5\times f(1)+5\times f'(1)$

$=5(f(1)+f'(1))=10$

따라서

$f(1)+f'(1)=2$

5. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 함수 $y=a\sin ax+b$의 주기가 π이고 최솟값이 5일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

함수 $y=a\sin ax+b$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{|a|}$ 이고 $a>0$이므로

$\dfrac{2\pi}{|a|}=\dfrac{2\pi}{a}=\pi$

즉, $a=2$

또한 최솟값은 $-a+b$이므로 $-2+b=5$에서

$b=6$

따라서 $a+b=2+7=9$

6. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{f(x)}=2,\quad \lim_{x\to 3}\frac{f(x-1)}{x-3}=4$$

를 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① 10　② 11　③ 12　④ 13　⑤ 14

$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x-1)}{x-3}=4$에서 $x\to 3$일 때 (분모) $\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉,

$\displaystyle\lim_{x\to 3}f(x-1)=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{1}{2}(x-1)^2+a(x-1)+b\right\}$

$=2+2a+b=0$ 에서

$b=-2a-2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2}(x-1)^2+a(x-1)-2a-2}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2+2a(x-1)-4(a+1)}{2(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2a+1)}{2(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+2a+1}{2}$$

$$=\frac{2a+4}{2}=a+2=4$$

즉, $a=2$이므로 $b=-6$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+2x-6$이므로

$f(4)=\dfrac{1}{2}\times 4^2+2\times 4-6=10$

7. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k+k)=60,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k+1)=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

$\sum_{k=1}^{10}a_k=A$, $\sum_{k=1}^{10}b_k=B$라 하면

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+b_k+k)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}k$

$=2A+B+\frac{10\times(1+10)}{2}=2A+B+55=60$에서

$2A+B=60-55=5$ ⋯⋯ ㉠

$\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k+1)=\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k+\sum_{k=1}^{10}1$

$=A-2B+10=10$에서

$A-2B=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=2$, $B=1$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}b_k=A+B=3$

8. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

$$f(1)=0,\quad F(1)=0,\quad F(2)=4$$

일 때, $F(3)$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$의 한 부정적분이
$F(x)$이므로 $F(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수임을
알 수 있다.

$F'(x)=f(x)$이므로 $f(1)=0$에서 $F'(1)=0$
$F(1)=0$이고 $F'(1)=0$이므로
$F(x)=(x-1)^2(x-\alpha)$로 놓을 수 있다.
$F(2)=4$에서 $F(2)=(2-1)^2(2-\alpha)=4$이므로
즉, $\alpha=-2$
따라서 $F(x)=(x-1)^2(x+2)$이므로
$F(3)=2^2\times 5=20$

9. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(9)와 점 B(1)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=6t^2-18t+7, \quad v_2(t)=2t+1$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값은? [4점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

두 점 P, Q의 시각 $t(t \ge 0)$에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$라 하자.

$$x_1(t)=x_1(0)+\int_0^t v_1(s)ds$$

$$=9+\int_0^t (6s^2-18s+7)ds$$

$$=9+\Big[2s^3-9s^2+7s\Big]_0^t=2t^3-9t^2+7t+9$$

$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t v_2(s)ds=1+\int_0^t (2s+1)ds$$

$$=1+\Big[s^2+s\Big]_0^t=t^2+t+1$$

시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리가 $f(t)$이므로

$f(t)=|x_1(t)-x_2(t)|=|2t^3-10t^2+6t+8|$

$g(t)=2t^3-10t^2+6t+8$이라 하면

$g'(t)=6t^2-20t+6$이므로

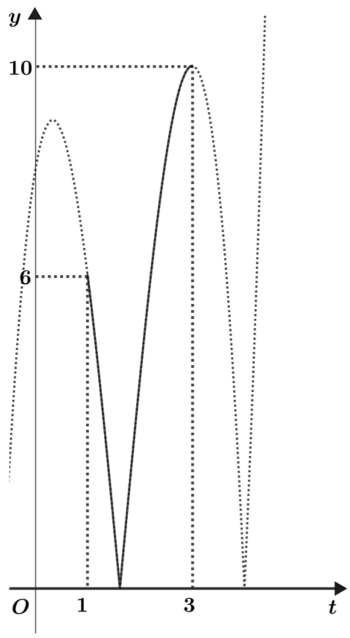
$g'(t)=2(t-3)(3t-1)=0$에서

$t=\dfrac{1}{3}$ 또는 $t=3$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	1	$\cdots$	3
$g'(t)$	$-$	$-$	0
$g(t)$	6	↘	-10

따라서 닫힌구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 다음과 같고 최댓값은 10이다.

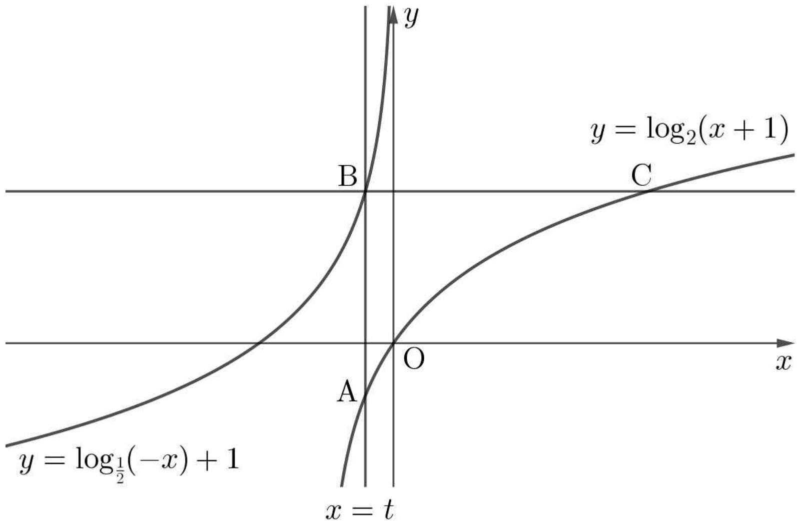


10. $-\frac{1}{2}<t<0$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선

$$y=\log_2(x+1),\quad y=\log_{\frac{1}{2}}(-x)+1$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x+1)$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 9$일 때, 선분 BC의 길이는? [4점]

① 4 ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ 5 ⑤ $\frac{16}{3}$



$\mathrm{A}(t, \log_2(t+1))$, $\mathrm{B}\left(t, \log_{\frac{1}{2}}(-t)+1\right)$에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_{\frac{1}{2}}(-t)+1-\log_2(t+1)$

$=\log_2\left(-\frac{1}{t}\right)+\log_2 2-\log_2(t+1)$

$=\log_2\left\{\left(-\frac{1}{t}\right)\times 2\times\frac{1}{t+1}\right\}=\log_2 9$에서

$\left(-\frac{1}{t}\right)\times 2\times\frac{1}{t+1}=9$

$9t^2+9t+2=0$

$(3t+2)(3t+1)=0$

$t=-\frac{2}{3}$ 또는 $t=-\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{2}<t<0$이므로 $t=-\frac{1}{3}$

$\log_2(x+1)=\log_{\frac{1}{2}}\left\{-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}+1=\log_2 3+\log_2 2$

$=\log_2 6$ 에서 $x+1=6$

즉, $x=5$이므로

선분 BC의 길이는 $5-\left(-\frac{1}{3}\right)=5+\frac{1}{3}=\frac{16}{3}$

$\boxed{0}$

11. 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(3-x)=f(3+x)$이다.
(나) 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1, t+1]$에서의 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $-1 \leq t \leq 1$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(1)$이다.

$f(2)=0$일 때, $f(5)$의 값은? [4점]

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

조건 (나)에서 $-1 \leq t \leq 1$인 모든 실수 t에 대하여
$g(t)=g(1)$이므로
$t=-1$일 때 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값
$g(1)$을 갖고
$t=1$일 때 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값
$g(1)$을 갖는다. 즉 $f(x)$는 최고차항의 계수가 -1인
사차함수이므로 $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$는 직선 $x=3$에
대하여 대칭이므로 $x=6$에서도 극댓값 $g(1)$을 가지므로
$f(x)=-x^2(x-6)^2+g(1)$로 놓을 수 있다.
$f(2)=0$에서 $f(0)=-2^2\times(-4)^2+g(1)=0$
따라서 $f(x)=-x^2(x-6)^2+64$이므로
$f(5)=-5^2\times(-1)^2+64=39$

12. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

① 14 ② 15 ③ 16 ④ 17 ⑤ 18

n이 홀수이면 $f(n)=1$이므로
$f(3)=f(5)=f(7)=1$이고
n이 짝수이면 $f(n)=2$ 또는 $f(n)=1$ 또는
$f(n)=0$이다.
$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$이므로
$f(4)+f(6)=4$ 이므로
$f(4)=f(6)=2$ 이고
n이 짝수일 때 $f(n)=2$이려면
$-(n-k)^2+8>0$이어야 한다.
그러므로 $-(4-k)^2+8$이고 $-(6-k)^2+8>0$
이므로
$4-2\sqrt{2}<k<4+2\sqrt{2}$ 이고
$6-2\sqrt{2}<k<6+2\sqrt{2}$ 이므로
$6-2\sqrt{2}<k<4+2\sqrt{2}$이다.
따라서 $6-2\sqrt{2}<k<4+2\sqrt{2}$을 만족시키는 자연수
k는 4또는 5또는 6이므로 그 합은
$4+5+6=15$이다.

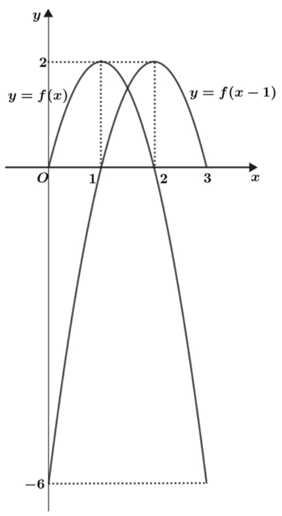
13. $-6 \le t \le 2$인 실수 t와 함수 $f(x)=2x(2-x)$에 대하여 x에 대한 방정식

$$\{f(x)-t\}\{f(x-1)-t\}=0$$

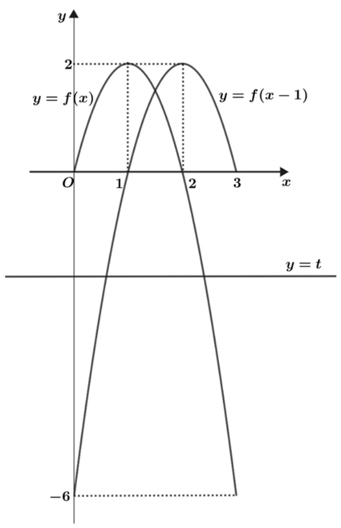
의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$에 속하는 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=a$에서 불연속이다. $\lim_{t \to a-} g(t) + \lim_{t \to a+} g(t)$의 값은? (단, a는 $-6<a<2$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

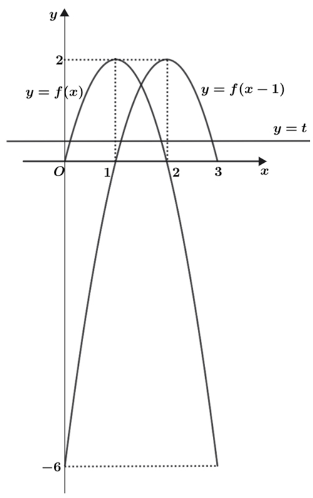
닫힌구간 $[0,3]$에서 함수 $y=f(x)$와 $y=f(x-1)$의 그래프는 다음과 같다.



$-6<t<0$일 때 $y=f(x)$와 $y=f(x-1)$와 $y=t$의 그래프는 그림과 같다.



$0<t<2$일 때 $y=f(x)$와 $y=f(x-1)$와 $y=t$의 그래프는 그림과 같다.



그러므로 함수 $g(t)$는 $t=0$에서 불연속이므로 $a=0$이다.

위의 그래프에서 $\lim_{t \to 0-} g(t)=1$, $\lim_{t \to 0+} g(t)=3$이므로

$\lim_{t \to a-} g(t)+\lim_{t \to a+} g(t)=1+3=4$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_5|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_2=27$, $a_3a_4>0$

(나) 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2|a_n|$이다.

① 224 ② 232 ③ 240 ④ 248 ⑤ 256

2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2|a_n|$이므로

$\sum_{k=1}^{2} a_k = a_1 + a_2 = 2|a_2|$이고

$a_2=27$이므로 $a_1=27$

$a_3a_4>0$이므로 $a_3>0$이면 $a_4>0$이고 $a_3<0$이면 $a_4<0$

(ⅰ) $a_3>0$이고 $a_4>0$인 경우

$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1+a_2+a_3 = 2|a_3| = 2a_3$에서 $a_3=54$

$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4 = 2|a_4| = 2a_4$에서

$a_4=108$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 2|a_5|$에서

$a_5>0$이면 $a_5=216$

$a_5<0$이면 $a_5=-72$

(ⅱ) $a_3<0$이고 $a_4<0$인 경우

$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1+a_2+a_3 = 2|a_3| = -2a_3$에서 $a_3=-18$

$\sum_{k=1}^{4} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4 = 2|a_4| = -2a_4$에서

$a_4=-12$

$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 = 2|a_5|$에서

$a_5>0$이면 $a_5=24$

$a_5<0$이면 $a_5=-8$

따라서 $|a_5|$의 값은 8, 24, 72, 216이므로

$M=216$, $m=8$이다.

따라서 $M+m=216+8=224$

15. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$가 있다. 양수 p와 함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge x) \\ f(x-p)+3p & (f(x)<x) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $f(0)$의 값은? [4점]

① $4-3\sqrt{6}$ ② $2-2\sqrt{6}$ ③ $3-2\sqrt{6}$ ④ $3-\sqrt{6}$ ⑤ $4-\sqrt{6}$

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $f'(0)=f'(2)=0$이므로 $f'(x)=3x(x-2)$로 놓을 수 있다.

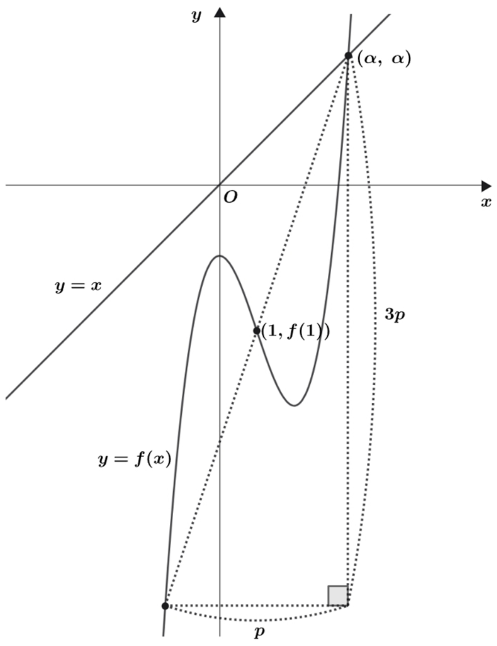
$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-6x)dx$

$=x^3-3x^2+C$(단, C는 적분상수)

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge x) \\ f(x-p)+3p & (f(x)<x) \end{cases}$에서

함수 $y=f(x-p)+3p$는 함수 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 p만큼 y축의 방향으로 $3p$만큼 평행이동시킨 그래프이고 함수 $y=f(x)$는 $(1, f(1))$에 대한 점대칭 함수이다.

$g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 함수 $f(x)$는 직선 $y=x$와 한 점에서만 만나고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 α라 하면 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 다음과 같은 위치관계여야 한다.



$f(\alpha)=\alpha^3-3\alpha^2+C=\alpha$ …… ㉠

$f(\alpha)-f(1)=(\alpha^3-3\alpha^2+C)-(1-3+C)=\dfrac{3p}{2}$ …… ㉡

$\dfrac{p}{2}=\alpha-1$, 즉 $p=2\alpha-2$ $(p>0)$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\alpha^3-3\alpha^2+2=\dfrac{3}{2}(2\alpha-2)$

$\alpha^3-3\alpha^2-3\alpha+5=0$

$(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-5)=0$

$\alpha=1$ 또는 $\alpha=1-\sqrt{6}$ 또는 $\alpha=1+\sqrt{6}$

$p>0$이므로 $\alpha=1+\sqrt{6}$

$f(0)=C$에서 $C=-\alpha^3+3\alpha^2+\alpha$

따라서

$C=-\alpha(2\alpha+5)+3\alpha^2+\alpha=\alpha^2-4\alpha$

$=(2\alpha+5)-4\alpha=5-2\alpha=5-2(1+\sqrt{6})$

$=3-2\sqrt{6}$

16. 부등식 $4^x - 9 \times 2^{x+1} + 32 \le 0$ 을 만족시키는 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

$4^x - 9 \times 2^{x+1} + 32 = 4^x - 18 \times 2^x + 32$
$= (2^x - 2)(2^x - 16) \le 0$
$2 \le 2^x \le 16$
$2 > 1$이므로 $1 \le x \le 4$이고 이를 만족시키는 정수 x는
$1, 2, 3, 4$이다.
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 $1+2+3+4=10$

17. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_{12}=5, \quad |a_5|=|a_{13}|$$

을 만족시킬 때, a_{24}의 값을 구하시오. [3점]

$a_5 \geq 0$이고 $a_{13} \geq 0$
또는 $a_5 < 0$이고 $a_{13} < 0$ 이면
$a_5 = a_{13}$이므로 공차가 0이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.
또한 $a_{12}=5$이므로 $a_5 < 0$이고 $a_{13} > 0$이다.
$|a_5|=|a_{13}|$에서
$-(a_5)=a_{13}$
$a_5 = a_{12}-7d=5-7d$, $a_{13}=a_{12}+d=5+d$이므로
$-(5-7d)=5+d$
$6d=10$
$a_{24}=a_{12}+12d=5+2\times 6d=5+2\times 10=25$

18. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (나) $\int_{-2}^{2} xf(x)\,dx = \frac{144}{5}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$을 만족하므로

$f(x)=x^3+ax$(a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\int_{-2}^{2} xf(x)dx = \int_{-2}^{2} x(x^3+ax)dx$$

$$= \int_{-2}^{2}(x^4+ax^2)dx = 2\int_{0}^{2}(x^4+ax^2)dx$$

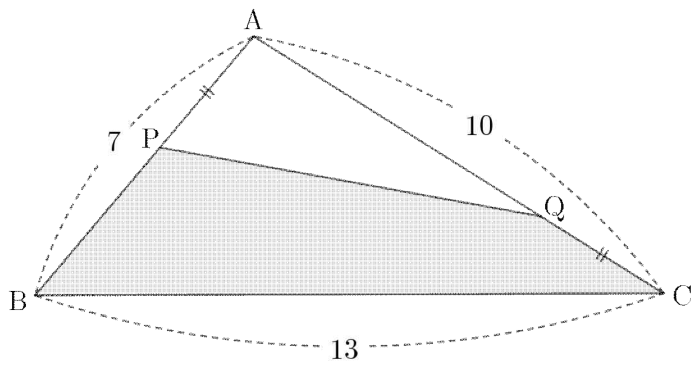
$$= 2\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3\right]_0^2 = 2\left(\frac{32}{5}+\frac{8a}{3}\right) = \frac{144}{5}$$

$$\frac{8a}{3}=8,\ a=3$$

따라서 $f(x)=x^3+3x$이므로

$f(3)=3^3+3\times3=27+9=36$

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=7$, $\overline{BC}=13$, $\overline{CA}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{CQ}$이고 사각형 PBCQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$이 되도록 잡을 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오. [3점]



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{\overline{AB}^2+\overline{CA}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{CA}}$$

$$=\frac{7^2+10^2-13^2}{2\times7\times10}=-\frac{1}{7}$$

$0<\angle A<\pi$이므로 $\sin A>0$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$\overline{AP}=\overline{CQ}=x\,(x<7)$라 하면 사각형 PBCQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times7\times10\times\frac{4\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{2}\times x\times(10-x)\times\frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{7}\left(x^2-10x+70\right)=14\sqrt{3}$$

$x^2-10x+70=49$

$x^2-10x+21=0$

$(x-3)(x-7)=0$

$x=3$ 또는 $x=7$

$x<7$이므로

$x=3$

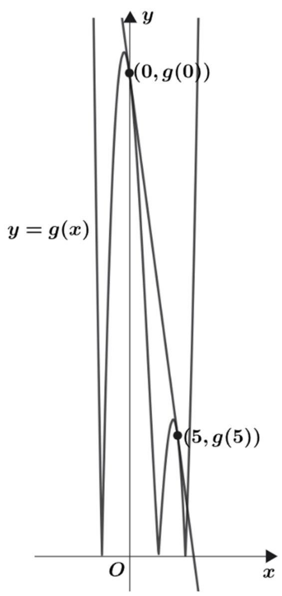
삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2=3^2+7^2-2\times3\times7\times\left(-\frac{1}{7}\right)=64$$

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=|f(x)|$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=5$에서 미분가능하고,
> 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5, g(5))$에서의 접선은 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0, g(0))$에서 접한다.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 함수 $y=f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 조건 (가)에 의하여 꼭짓점의 x좌표가 2이므로
$f'(x)=3(x-2)^2+a$(a는 상수)로 놓을 수 있다.
조건 (나)에 의하여 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5, g(5))$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$와 점 $(0, g(0))$에서의 접선은 일치하므로
$g'(0)=g'(5)$이다.
함수 $f(x)$에서 $f'(x)=3(x-2)^2+a$이므로
$f'(0)<0$이고 $f'(5)>0$ 이므로
$g'(0)=g'(5)$위해서는 $f(5)<0$이고
$x=5$에서 $g(x)=|f(x)|=-f(x)$
함수 $g(x)=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같음을 알 수 있다.



$f'(0)=12+a$
$f'(5)=27+a$ 이므로
$f'(0)=-f'(5)$
즉, $12+a=-(a+27)$, $a=-\dfrac{39}{2}$

$$f'(x)=3(x-2)^2-\frac{39}{2}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left\{3(x-2)^2-\frac{39}{2}\right\}dx$$

$=(x-2)^3-\dfrac{39}{2}x+C$(단, C는 적분상수)

함수 $g(x)=|f(x)|$위의 점 $(0, g(0))=(0, C-8)$에서의 접선의 방정식은

$y-(C-8)=-\dfrac{15}{2}(x-0)$이고

이 접선의 방정식은 $(5, g(5))=\left(5, \dfrac{141}{2}-C\right)$를 지나므로

$$\frac{141}{2}-C-(C-8)=-\frac{15}{2}\times 5$$

즉, $C=58$

따라서 $f(x)=(x-2)^3-\dfrac{39}{2}x+58$

$g(8)=|f(8)|=118$

21. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 α, β에 대하여 $\frac{12}{\pi}\times(\beta-\alpha)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

> $0\le x<2\pi$에서 함수
>
> $$f(x)=\cos^2\left(\frac{13}{12}\pi-2x\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{7}{12}\pi\right)-1$$
>
> 은 $x=\alpha$일 때 최댓값을 갖고, $x=\beta$일 때 최솟값을 갖는다.

$2x-\frac{7}{12}\pi=t$라 하면 $2x=t+\frac{7}{12}\pi$이고

$0\le x<2\pi$에서 $-\frac{7}{12}\pi<t\le\frac{41}{12}\pi$이다.

$f(x)=\cos^2\left(\frac{13}{12}\pi-2x\right)+\sqrt{3}\cos\left(2x-\frac{7}{12}\pi\right)-1$

$=\cos^2\left(\frac{13}{12}\pi-t-\frac{7}{12}\pi\right)+\sqrt{3}\cos t-1$

$=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\sqrt{3}\cos t-1$

$=\sin^2 t+\sqrt{3}\cos t-1=1-\cos^2 t+\sqrt{3}\cos t-1$

$=-\cos^2 t+\sqrt{3}\cos t=-\left(\cos t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

이므로 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 최댓값을 갖고 $\cos t=-1$일 때 최솟값을 갖는다.

$\frac{12}{\pi}\times(\beta-\alpha)$의 최댓값을 구해야 하고

$2x=t+\frac{7}{12}\pi$이므로

$\alpha=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{7}{24}\pi=\frac{5}{24}\pi$일 때 최소이고

$\beta=\frac{1}{2}\times3\pi+\frac{7}{24}\pi=\frac{43}{24}\pi$일 때 최대이다.

따라서 $\frac{12}{\pi}\times(\beta-\alpha)$의 최댓값은

$\frac{12}{\pi}\times\left(\frac{43}{24}\pi-\frac{5}{24}\pi\right)=19$ 이다.

22. 함수 $f(x)=x^2-2x$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $\{h(x)-f(x)\}\{h(x)-g(x)\}=0$이다.
(나) $h(k)h(k+2)\le 0$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수는 3이다.

$\int_{-3}^{2}h(x)\,dx=26$이고 $h(10)>80$일 때, $h(1)+h(6)+h(9)$의 값을 구하시오. [4점]

조건 (가)에 의하여 $h(x)=f(x)$ 또는 $h(x)=g(x)$이고 함수 $h(x)$는 연속함수이므로 함수 $f(x)$와 함수 $g(x)$의 교점을 기준으로 함수 $h(x)$는 $f(x)$ 또는 $g(x)$로 나타낼 수 있음을 알 수 있다.
조건 (나)에서 $h(x)<0$인 구간이 존재하면 $h(k)h(k+2)\le 0$을 만족시키는 실수 k는 무수히 많으므로 $h(x)\ge 0$임을 알 수 있다.
함수 $f(x)$는 구간 $(0,2)$에서 $f(x)<0$이므로 구간 $(0,2)$에서 $g(x)>0$이고 $h(x)=g(x)$이다. …… ㉠
방정식 $h(k)=0$을 만족시키는 실수 k의 개수가 2이면 방정식 $h(k+2)=0$을 만족시키는 실수 k의 개수도 2이므로 방정식 $h(k)h(k+2)=0$을 만족시키는 서로 다른 실수 k의 개수가 3이려면 방정식 $h(k)=0$과 방정식 $h(k+2)=0$은 공통근 1개가 존재해야 하므로 $h(0)=h(2)=0$임을 알 수 있다.
$h(0)=h(2)=0$이므로 $g(2)=g(0)=0$이다. …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $g(x)=x(x-2)^2$ 또는 $g(x)=x(x-2)(x-a)\,(a>2)$이고

$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ g(x) & (0\le x<2) \end{cases}$ 이다.

$\int_{-3}^{2}h(x)dx=26$이므로

$$\int_{-3}^{2}h(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx$$

$g(x)=x(x-2)^2$일 때

$$\int_{-3}^{2}h(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=0-\left\{\frac{1}{3}\times(-3)^3-(-3)^2\right\}+\left(\frac{1}{4}\times 2^4-\frac{4}{3}\times 2^3+2\times 2^2\right)-0$$
$$=\frac{58}{3}$$

이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

그러므로 $g(x)=x(x-2)(x-a)\,(a>2)$이고

$$\int_{-3}^{2}h(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_{0}^{2}g(x)dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x^2-2x)dx+\int_{0}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_{0}^{2}$$
$$=0-\left\{\frac{1}{3}\times(-3)^3-(-3)^2\right\}+\left(\frac{1}{4}\times 2^4-\frac{a+2}{3}\times 2^3+a\times 2^2\right)-0$$
$$=18+\left(4-\frac{8a+16}{3}+4a\right)=\frac{50+4a}{3}=26$$

$a=7$
또 $f(10)=80$이고 $h(10)>80$이므로 $x\ge 10$에서 $h(x)=g(x)$이다.
방정식 $f(x)=g(x)$에서
$g(x)-f(x)=x(x-2)(x-7)-x(x-2)$
$=x(x-2)(x-8)=0$이므로

따라서 $h(x)=\begin{cases} x(x-2) & (x<0) \\ x(x-2)(x-7) & (0\le x<2) \\ x(x-2) & (2\le x<8) \\ x(x-2)(x-7) & (x\ge 8) \end{cases}$이고

$h(1)+h(6)+h(9)=6+24+126=156$

※ 확인 사항

2025학년도 사관학교 1차 선발시험 문제지

수 학 영 역 (확률과 통계)

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{3}{7}\right)$을 따를 때, $\mathrm{V}(2X)$의 값은? [2점]

① 16 ② 24 ③ 32 ④ 40 ⑤ 48

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{3}{7}\right)$을 따른다.

따라서

$\mathrm{E}(X) = 49 \times \frac{3}{7} = 21$

$\mathrm{V}(X) = 49 \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = 12$

$\mathrm{V}(2X) = 2^2\mathrm{V}(X) = 48$

24. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cup B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{10}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$P(A|B)=P(A)=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{7}{10}=\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{2}P(B)$

$\frac{1}{2}P(B)=\frac{7}{10}-\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$P(B)=\frac{2}{5}$

25. $(x^2+y)^4\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y^2}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{x^4}{y^5}$의 계수는? [3점]

① 80 ② 120 ③ 160 ④ 200 ⑤ 240

다항식 $(x^2+y)^4$전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_a(x^2)^{4-a}(y)^a={}_4\mathrm{C}_a x^{8-2a}\times y^a$

(단, $a=0, 1, 2, 3, 4$)

$\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y^2}\right)^5$전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_b\left(\frac{2}{x}\right)^{5-b}\left(\frac{1}{y^2}\right)^b={}_5\mathrm{C}_b\times 2^{5-b}\times x^{b-5}\times y^{-2b}$

(단, $b=0, 1, 2, 3, 4, 5$)이므로

$(x^2+y)^4\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$={}_4\mathrm{C}_a\times{}_5\mathrm{C}_b\times 2^{5-b}x^{3-2a+b}\times y^{a-2b}$

$\frac{x^4}{y^5}$계수는

$3-2a+b=4$, $a-2b=-5$를 연립하면

$a=1$, $b=3$일 때

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3\times 2^{5-3}=4\times 10\times 2^2=160$

26. 어느 사관학교 생도의 일주일 수면 시간은 평균이 45시간, 표준편차가 1시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 사관학교 생도 중 임의추출한 36명의 일주일 수면 시간의 표본평균이 44시간 45분 이상이고 45시간 20분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.8185 ③ 0.8413 ④ 0.9104 ⑤ 0.9772

사관학교 생도 1명의 일주일 수면 시간을 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(45, 1^2)$을 따른다. 이때 크기가 36인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\mathrm{E}(\overline{X}) = \mathrm{E}(X) = 45$

$\mathrm{V}(\overline{X}) = \dfrac{\mathrm{V}(X)}{36} = \dfrac{1^2}{36} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^2$

이므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(45, \left(\dfrac{1}{6}\right)^2\right)$을 따르고,

$Z = \dfrac{\overline{X} - 45}{\dfrac{1}{6}}$이라 하면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\mathrm{P}\left(44 + \frac{3}{4} \le \overline{X} \le 45 + \frac{1}{3}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\frac{44 + \frac{3}{4} - 45}{\frac{1}{6}} \le Z \le \frac{45 + \frac{1}{3} - 45}{\frac{1}{6}}\right)$$
$$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 2)$$
$$= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.4332 + 0.4772 = 0.9104$$

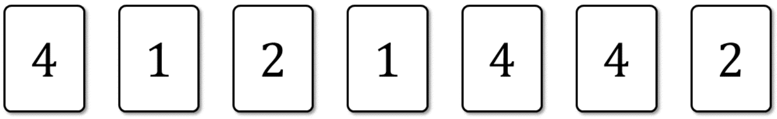
27. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [3점]

(가) $x=1,\ 2,\ 3$일 때 $f(x) \le f(x+1)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다.

① 50 ② 60 ③ 70 ④ 80 ⑤ 90

조건 (가)에 의하여 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$ 이고
조건 (나)에 의하여 치역의 원소의 개수는 2이다.
(ⅰ) $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)$인 경우
함수 $f : X \to X$의 개수는 서로 다른 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 다섯 개의 숫자 중에서 $f(1)$과 $f(5)$에 대응하는 서로 다른 두 개의 숫자를 고르는 방법의 수와 같으므로 $5 \times 4 = 20$
(ⅱ) (ⅰ)의 경우가 아닌 $f(1) \le f(2) \le f(3) \le f(4)$인 경우
치역의 원소의 개수를 결정하는 방법의 수는
${}_5\mathrm{C}_2 = 10$이고 치역의 서로 다른 2개 중에서 중복을 허락하여 4개를 뽑는 방법의 수는
${}_2\mathrm{H}_4 = {}_{2+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$에서 (ⅰ)의 경우를 제외 해야 하므로 $5-2=3$
또 $f(5)$를 결정하는 방법이 2이므로 함수 $f : X \to X$의 개수는 $10 \times 3 \times 2 = 60$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
함수 $f : X \to X$의 개수는 $20+60=80$

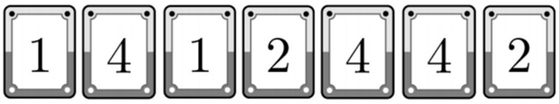
28. 숫자 1, 1, 2, 2, 4, 4, 4가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 차를 각각 a, b, c, d, e, f라 하자. 예를 들어 그림과 같이 나열한 경우 $a=3$, $b=1$, $c=1$, $d=3$, $e=0$, $f=2$이다.

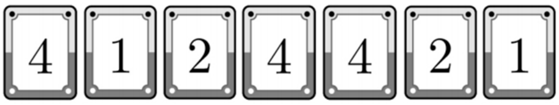


$a+b+c+d+e+f$의 값이 짝수가 되도록 카드를 나열하는 경우의 수는? (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

숫자 $1, 1, 2, 2, 4, 4, 4$가 하나씩 적혀 있는 7장의 카드
중에서 홀수가 2장, 짝수가 5장이고
서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 숫자의 차가 홀수가
되는 경우는 홀수와 짝수 또는 짝수와 홀수가 이웃하는
경우이고 서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 숫자의 차가
짝수가 되는 경우는 그 이외의 경우이다.
$a+b+c+d+e+f$의 값이
홀수가 되는 경우는





위의 예시처럼 한쪽 끝에만 1이 오는 경우 이므로 전체의
경우에서 위의 두 가지 케이스를 제외하면 된다.
숫자 $1, 1, 2, 2, 4, 4, 4$가 하나씩 적혀 있는 7장의
카드를 나열하는 방법의 수는 $\dfrac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$이고
왼쪽 끝에만 1이 오는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!\times3!}-\dfrac{5!}{2!\times3!}=60-10=50$
오른쪽 끝에만 1이 오는 경우의 수는
$\dfrac{6!}{2!\times3!}-\dfrac{5!}{2!\times3!}=60-10=50$
이므로
따라서 $a+b+c+d+e+f$의 값이 짝수가 되도록
카드를 나열하는 경우의 수는 $210-(50+50)=110$

29. 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 빨간 공 1개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 하나의 공을 꺼내어 색을 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 색의 종류의 수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{E}(64X-10)$의 값을 구하시오. [4점]

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4$이다.

(i) 확률변수 X가 1인 경우
같은 색 공을 네 번 뽑으면 되므로

$$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{256}$$

(ii) 확률변수 X가 2인 경우
네 가지의 색 중에서 뽑을 두 가지의 색을 선택한 다음 두 가지 색을 네 번 뽑는 경우의 수에서 같은 색을 네 번 뽑는 두 가지 경우의 수를 빼면 되므로

$$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times\left(2^4-2\right)}{4^4}=\frac{84}{256}$$

(iii) 확률변수 X가 3인 경우
네 가지의 색 중에서 뽑을 세 가지의 색을 선택한 다음 세 가지 색 중에서 어떤 색은 두 번 뽑아야 하므로 두 번 뽑을 색을 선택하고 뽑는 순서를 결정하는 방법의 수는

$\frac{4!}{2!}$이므로

$$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_1\times\frac{4!}{2!}}{4^4}=\frac{144}{256}$$

(iv) 확률변수 X가 4인 경우
네 가지의 색을 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$\mathrm{P}(X=4)=\frac{4!}{4^4}=\frac{24}{256}$$

(i) ~ (iv)에 의하여

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{4}{256}+2\times\frac{84}{256}+3\times\frac{144}{266}+4\times\frac{24}{256}$$

$=\frac{700}{256}=\frac{175}{64}$이므로

$$\mathrm{E}(64X-10)=654E(X)-10=64\times\frac{175}{64}-10$$

$$=165$$

30. 흰 공 1개, 검은 공 6개, 노란 공 2개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내는 시행을 한다. 이 시행을 반복하여 주머니에 남아 있는 공의 색의 종류의 수가 처음으로 2가 되면 시행을 멈춘다. 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수가 4일 때, 꺼낸 공 중에 흰 공이 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

꺼낸 공 중 흰공이 있는 사건을 A, 이 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수가 4인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(A|B)$이다.

4개의 공을 꺼낸 후 처음으로 주머니에 남아 있는 공의 색의 종류가 2가 되려면 첫 번째와 두 번째 그리고 세 번째의 시행까지 검은공 2개와 노란공 1개를 꺼낸 다음 네 번째 시행에서 흰 공 또는 노란 공을 꺼내거나 첫 번째와 두 번째 그리고 세 번째의 시행까지 검은공 3개를 꺼낸 다음 네 번째 시행에서 흰 공을 꺼낸 경우이므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{3\times6\times5\times2}{7\times6\times5}\times\frac{2}{4}+\frac{6\times5\times4}{7\times6\times5}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{7}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3\times6\times5\times2}{7\times6\times5}\times\frac{1}{4}+\frac{6\times5\times4}{7\times6\times5}\times\frac{1}{4}$$

$$=\frac{5}{14}$$

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{4}{7}}=\frac{5}{8}$$

따라서

$p=8$, $q=5$이므로

$p+q=8+5=13$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.