1. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

$3^{\frac{f(n)}{8}}\times\left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-9$

$3^{\frac{f(n)}{8}}=3,\ f(n)=8$

$f(1)=f(3)=8$

$k-1=8,\ k=9$

2. 자연수 $m(m\ge 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9}f(m)$의 값을 구하시오.

m^{12}의 n제곱근을 x라 하면 $x^n=m^{12}$

$x=m^{\frac{12}{n}}$

$m=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7$일 때, $m^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 5

$m=4,\ 4^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$m=8,\ 8^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 8

$m=9,\ 9^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$\sum_{m=2}^{9}f(m)=5\times5+7\times2+8=47$

3. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $\left(x^n-64\right)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

n은 짝수이고 $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$

$f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$

$n=2$ or 4 or 6 or 12

24

4. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$(단, k는 정수)

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)=8^{\frac{k}{2}}$에서

$n+4$를 3×2^p 이라하면 $2^{-p-2}=2^{\frac{3}{2}k}$

$k=\frac{2(-p-2)}{3}$이고 k는 정수이므로

$-p-2=3q,\ p=-3q-2$(단, q는 정수)

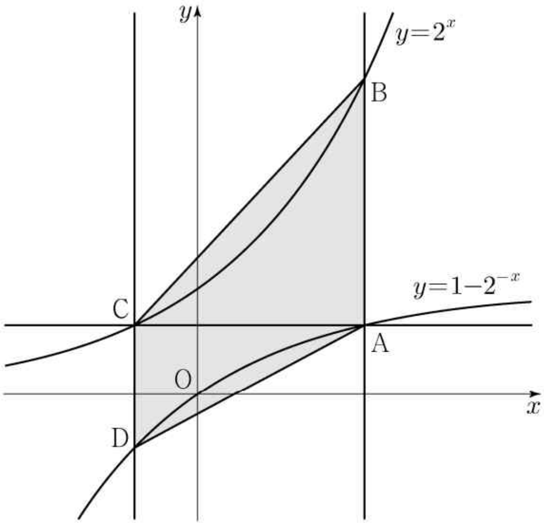
$n=3\times 2^{-3q-2}-4$

n은 1000이하의 자연수이므로 q는 음의 정수이고 다음과 같다.

$n=3\times 2-4,\ 3\times 2^4-4,\ 3\times 2^7-4$

426

5. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$　② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$

③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$　④ $4\log_2 3-2$

⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

$C(\log_2 k,\ k)$, $A(-\log_2(1-k),\ k)$

$D\left(\log_2 k,\ 1-\frac{1}{k}\right)$, $B\left(-\log_2(1-k),\ \frac{1}{1-k}\right)$

$$\frac{1}{1-k}-k=2\left(k-1+\frac{1}{k}\right)$$

$$\frac{1-k+k^2}{1-k}=2\times\frac{k^2-k+1}{k},$$

$$k=2(1-k),\ k=\frac{2}{3}$$

$C\left(\log_2\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $A\left(\log_2 3,\ \frac{2}{3}\right)$

$D\left(\log_2\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}\times\left(\log_2\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$$

6. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$

④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

$A_1(a,\ 2^a),\ B_1(a+1,\ 2^{a+1})$
$2^{a+1}-2^a=3,\ a=\log_2 3$
$x_1=2^{a+1}=6$

$A_2(a,\ 2^a),\ B_2(a+2,\ 2^{a+2})$
$2^{a+2}-2^a=6,\ a=1$
$x_2=2^{a+2}=8$

$A_3(a,\ 2^a),\ B_3(a+3,\ 2^{a+3})$
$2^{a+3}-2^a=9,\ a=\log_2\frac{9}{7}$
$x_3=2^{a+3}=\frac{72}{7}$

$x_1+x_2+x_3=\frac{170}{7}$

7. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오.

$x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$$

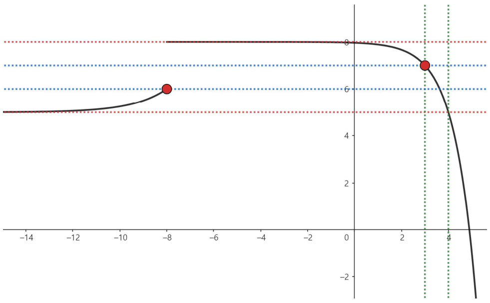
$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k,\ k\times 5^k=5^3,\ k^3\times 5^{3k}=5^9$

$f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right)$

$f(12)=\left(\frac{1}{5}\right)^9,\ f(f(12))=f\left(\frac{1}{5^9}\right)=36$

8. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x>-8) \end{cases}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.



$-3^{3-3}+8=7,\ -3^{4-3}+8=5$ 이므로

$2^{x+a}+b$의 점근선은 5이고

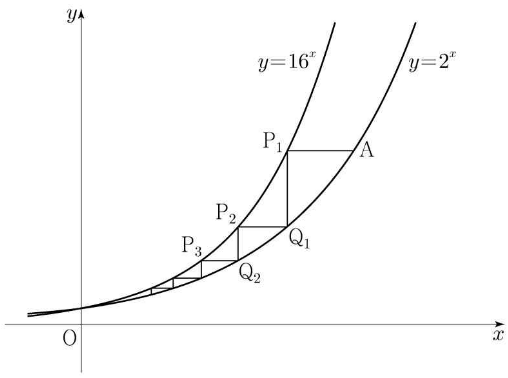
$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$a=8$

$a+b=13$

9. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $A(64, 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자. 점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자. 이와같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.



$A(64, 2^{64})$, $P_1(16, 2^{64})$, $Q_1(16, 2^{16})$, $P_2(4, 2^{16})$

$Q_2(4, 2^4)$, $P_3(1, 2^4)$, $Q_3(1, 2)$, $P_4\left(\frac{1}{4}, 2\right)$

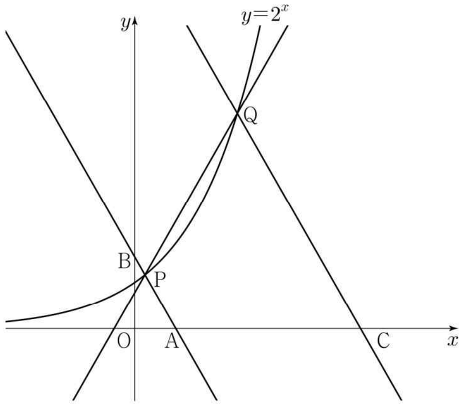
$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$x_5 = \frac{1}{16}$, $x_6 = \frac{1}{64}$

$\frac{1}{64} < \frac{1}{k} \le \frac{1}{16}$, $16 \le k < 64$

48

10. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a,\ 2^a)$, $Q(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{CQ}=3\overline{AB}$일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$)



$\overline{AB}=4\overline{PB}$이므로 점 A의 x좌표는 $4a$
삼각형의 닮음에 의해
$P(a,\ 2^a)$, $3\times\dfrac{4}{3}\times 2^a=2^{a+2}$ 이므로
$Q(a+2,\ 2^{a+2})$

$$m=\frac{2^{a+2}-2^a}{2}$$

$$-m=\frac{-2^a}{3a},\ \frac{2^{a+2}-2^a}{2}=\frac{2^a}{3a},$$

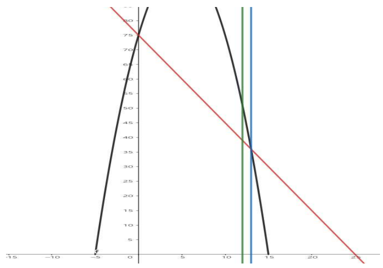
$$a=\frac{2}{9},\ b=\frac{20}{9}$$

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

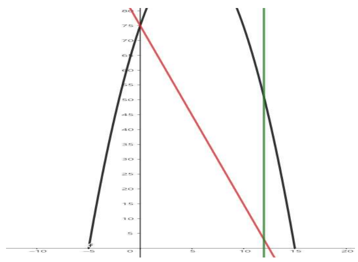
$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$ **의 값이 양수가 되도록 하는 자연수** n**의 개수가 12이다.**

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-n^2+10n+75>75-kn$



$n=12,\ -n^2+10n+75>75-kn$
$n=13,\ -n^2+10n+75\le 75-kn$
$k=3$



$n=12,\ 75-kn>0$
$n=13,\ 75-kn\le 0$

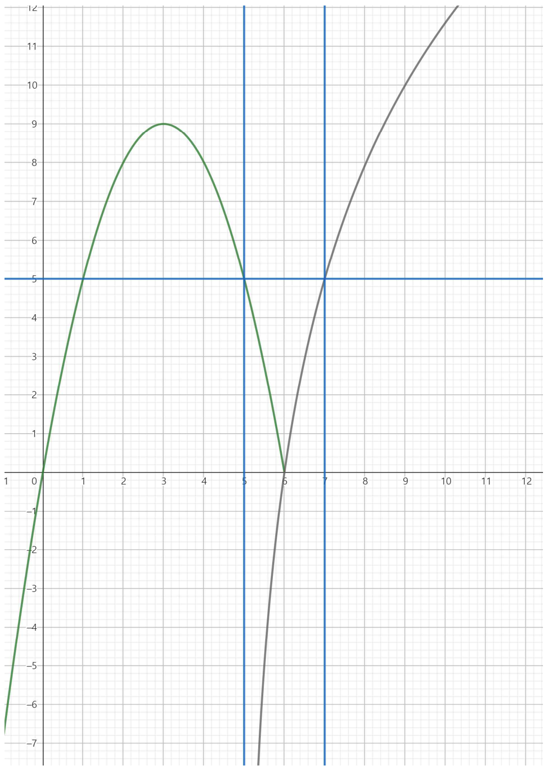
$k=6$

$3+6=9$

12. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.



$a\log_4 2 \geq 5,\ a \geq 10$

13. 두 상수 $a, b(1 < a < b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a), (b, \log_2 b)$을 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a), (b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

$a : b = \log_2 a - \log_4 a : \log_2 b - \log_4 b$

$\log_4 a^b = \log_4 b^a,\ a^b = b^a = 20$

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=800$

14. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 〈보기〉의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$)

• 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다. • 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다. • 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

〈보기〉

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

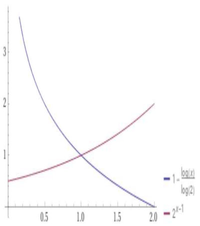
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

$t=1$ 이므로 ㄱ. 참

$y=1-\log_2 x$, $y=2^{x-1}$

$(1, 1)$, $(1, 1)$

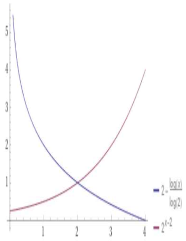


ㄴ.

$t=2$

$y=2-\log_2 x$, $y=2^{x-2}$

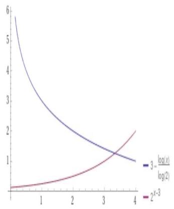
$(2, 1)$, $(2, 1)$



$t=3$

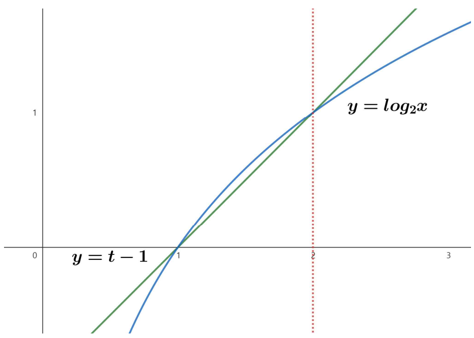
$y=3-\log_2 x$, $y=2^{x-3}$

$(2, 1)$, $(3, 1)$



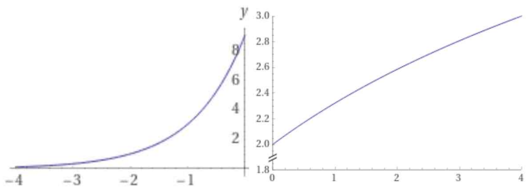
참

ㄷ. 이 참이라고 가정하면 모든 양의 실수 t에 대하여 $t-\log_2 t \geq 1$을 만족시켜야 한다.



이므로 거짓

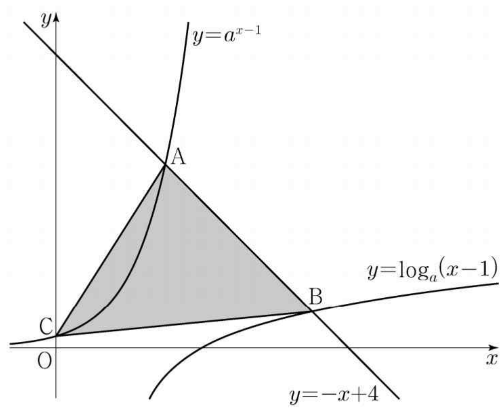
15. 자연수 n에 대하여 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.



$2<n<9$일 때, $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 4가 되므로

$\dfrac{6(3+8)}{2}=33$

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



$y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$은 $y=x-1$에 대하여 대칭이므로

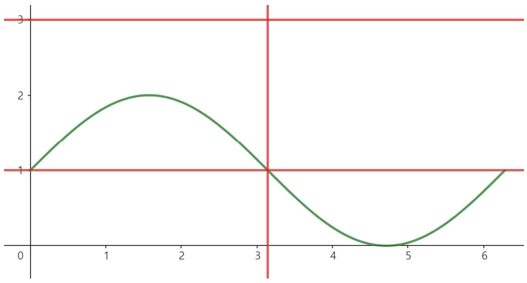
두 점 A, B의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이므로 $A\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{2}$, $a=\dfrac{25}{4}$, $C\left(0,\ \dfrac{4}{25}\right)$, $h=\dfrac{\left|4-\dfrac{4}{25}\right|}{\sqrt{2}}$

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{96}{25\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25}$, $50S=192$

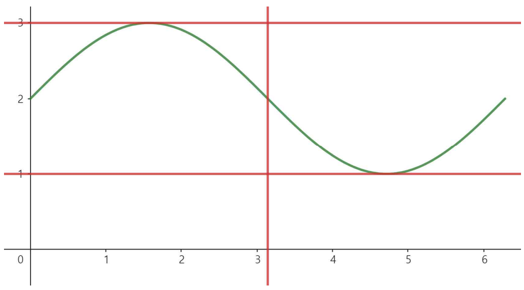
17. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1, y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오.

$a=1, b=1$

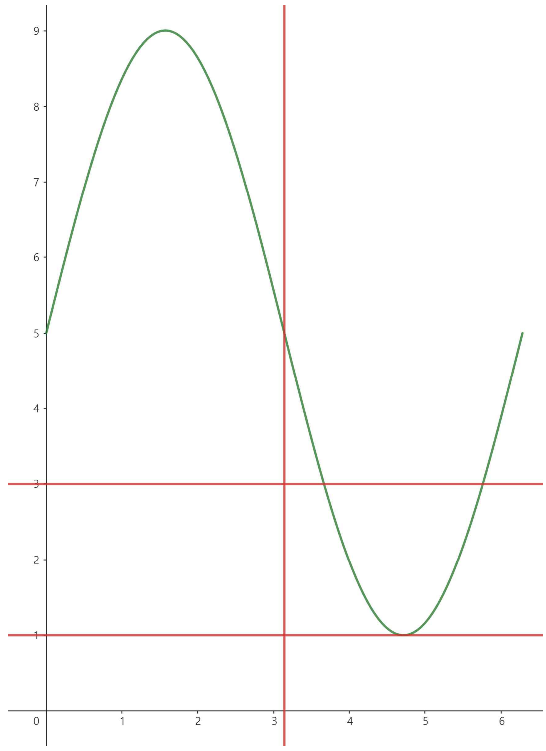


열린구간 $(0, 2\pi)$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

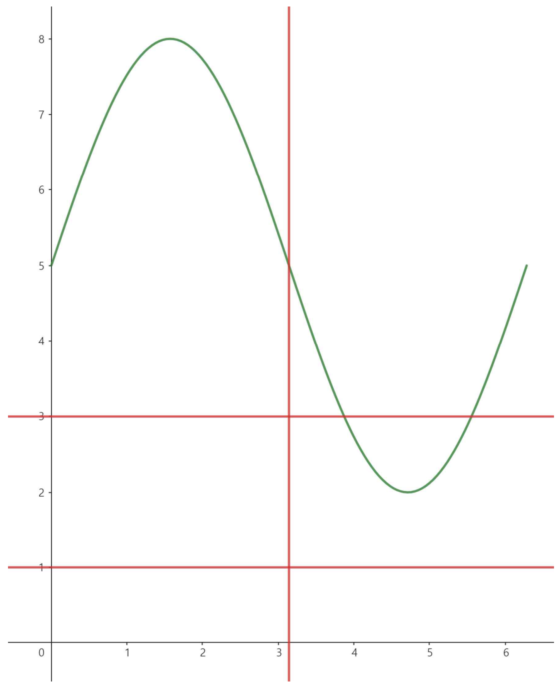
$a=1, b=2$



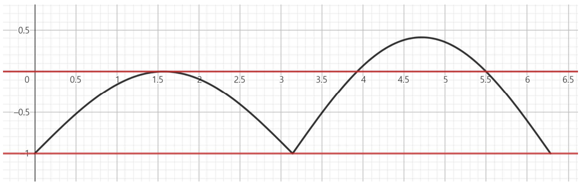
$a=4, b=5$



$a=3, b=5$



18. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases} \sin x-1 & (0 \le x < \pi) \\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi \le x \le 2\pi) \end{cases}$ 가 있다. $0 \le t \le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



$$0+\frac{\pi}{2}+\pi+2\times\frac{\pi+2\pi}{2}+2\pi=\frac{13}{2}\pi$$

15

19. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$
④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

$$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$$

$$\beta=2\pi-\alpha$$

$$\beta-\alpha=2\pi-2\alpha=\frac{9}{7}\pi$$

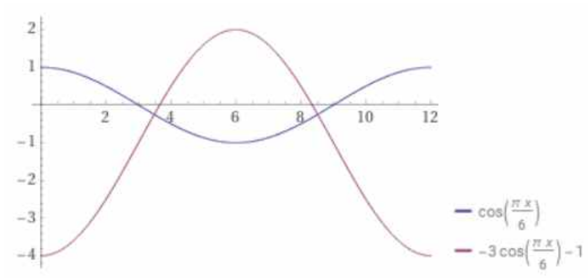
20. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

$f(2+x)f(2-x)$
$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$-\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)<\frac{1}{2}$

$2+6+10+14=32$

21. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$, $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값을 구하시오. (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)



$\alpha_1=2,\ \alpha_2=10$
$k=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$
$\frac{\pi x}{6}=\frac{2\pi}{3}$ or $\frac{4\pi}{3}$

$|\beta_1-\beta_2|=4$

22. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

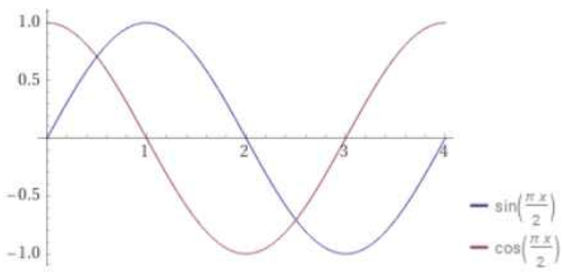
〈보기〉

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\}$
$= \left\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\frac{\alpha(t) + \beta(t)}{2} = \frac{5}{2}$이므로 참

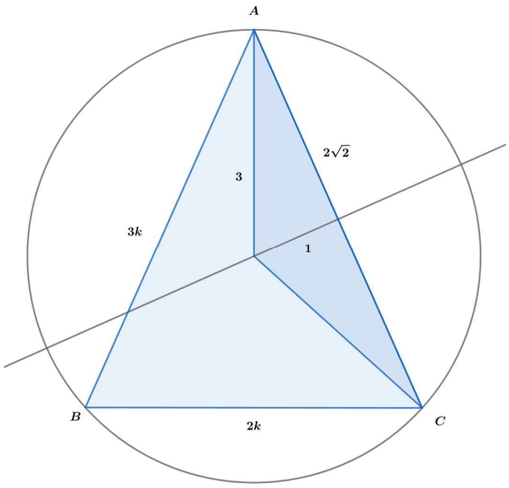
ㄴ. $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때,
$\beta(t) - \alpha(t) = 3$, $\beta(0) - \alpha(0) = 3$

ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = k$ 라 하면
$\cos k = t_2$, $\sin k = t_1$ 이므
$\cos k - \sin k = \frac{1}{2}$
$1 - 2t_1 \times t_2 = \frac{1}{4}$, $t_1 \times t_2 = \frac{3}{8}$
로 거짓

23. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

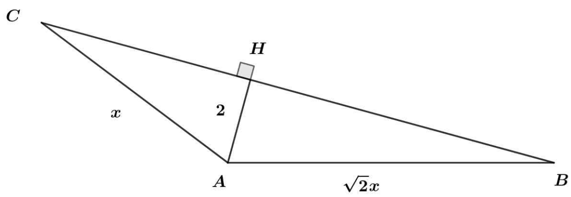


$k = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\frac{1}{2} \times 2k \times 2\sqrt{2}k = \frac{64\sqrt{2}}{9}$

24. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$, $\overline{AH} = 2$이고 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



$R = 5\sqrt{2}$

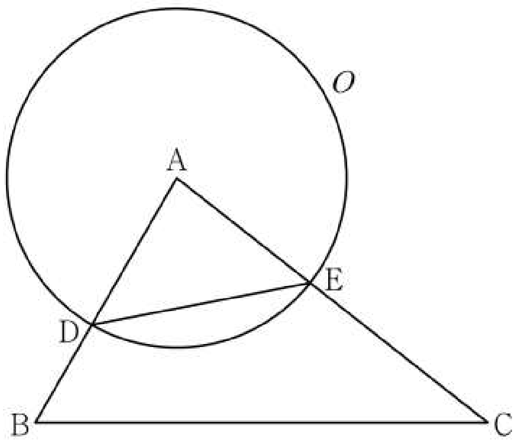
$\frac{x}{\sin B} = 2R = 10\sqrt{2}$

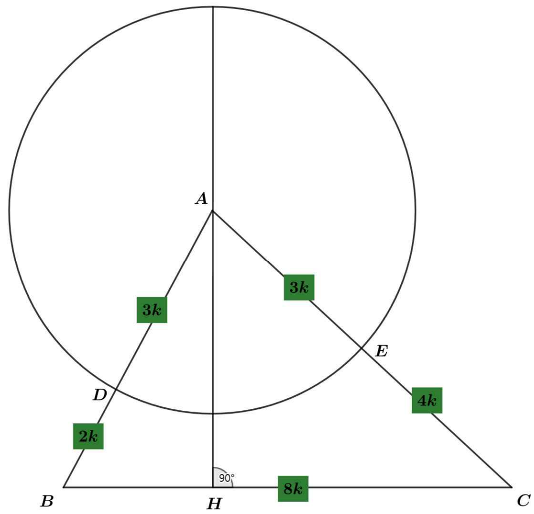
$\sin B = \frac{x}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}x}$, $x^2 = 20$

$\overline{BH}^2 = 2x^2 - 4 = 36$, $\overline{BH} = 6$

25. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB위에 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2$인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin A : \sin C = 8 : 5$이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9 : 35$이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB} < \overline{AC}$)

① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$
③ $30+25\sqrt{3}$ ④ $36+30\sqrt{3}$
⑤ $42+35\sqrt{3}$





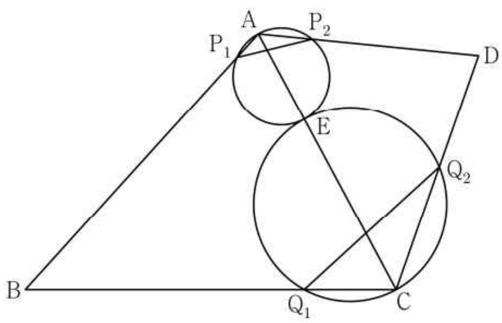
$$\cos B = \frac{25k^2+64k^2-49k^2}{2\times 5k \times 8k} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AH}+3k)\times 8k$$
$$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}+3\right)\times 8k^2$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{7k}{\sin B} = 14,\ k = \sqrt{3}$$

$$= 36+30\sqrt{3}$$

26. 그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$인 사각형 $ABCD$에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2 라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$)



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $\sqrt{24}$ ⑤ 5

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin(\angle BAD)}=2r_1,\ \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)}=2r_2$$

$r_1:r_2=1:2$

$$\frac{\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BAD)}=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1P_2}}\times\frac{r_1}{r_2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin(\angle BAD)=\frac{4}{5}$$

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AB}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AB}\times\sin(\angle BAD)=2$$

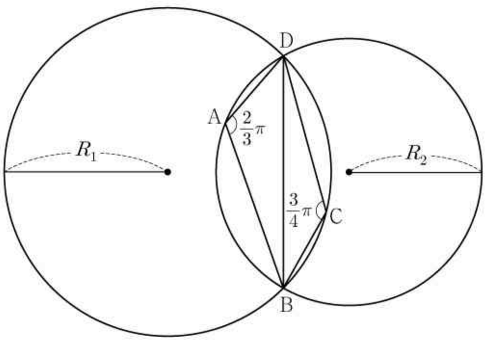
$$\overline{AB}\times\overline{AB}=5$$

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=11$$

$$(\overline{AB}+\overline{CD})^2$$
$$=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{AB}=21$$

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\sqrt{21}$$

27. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$인 사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1\times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

삼각형 BCD 에서 사인법칙에 의하여 $R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$ 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여 $R_2=$ (가) $\times\overline{BD}$ 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여 $\overline{BD}^2=2^2+1^2-($ (나) $)$ 이므로 $R_1\times R_2=$ (다) 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.

$R_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$

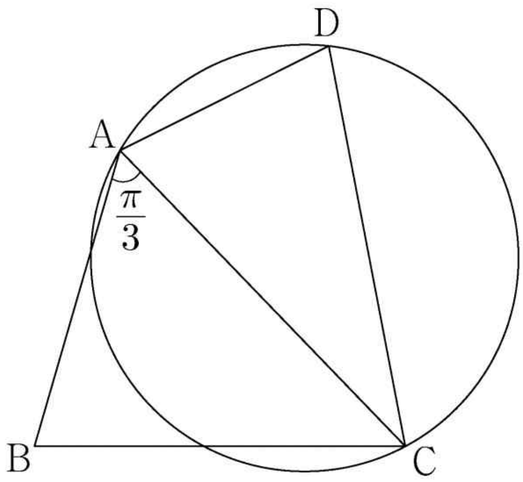
$\overline{BD}^2=2^2+1^2-\left(2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi\right)$

$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{7}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{7}$

$p=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $q=-2$, $r=\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

$9\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2=98$

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$
④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

$\overline{AC}=4$, $S_1=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

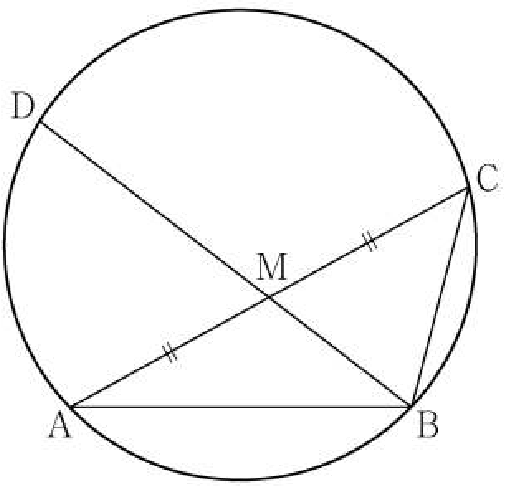
$S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$

$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{4}{\sin(\angle ADC)}=2R$, $R=\frac{2}{\sin(\angle ADC)}$

$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{2}{\sin^2(\angle ADC)}=\frac{54}{25}$

29. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\overline{AC}=x$

$4=x^2+9-6x\times\frac{7}{8}$, $x=4$

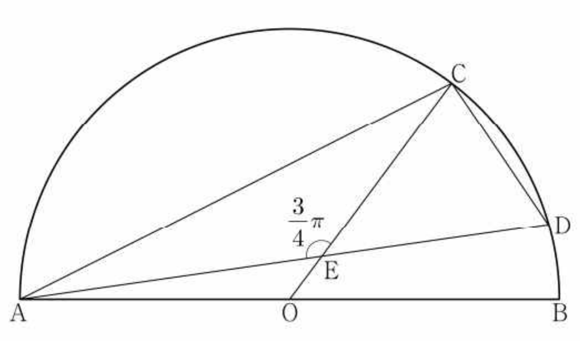
$\overline{AM}=\overline{MC}=2$

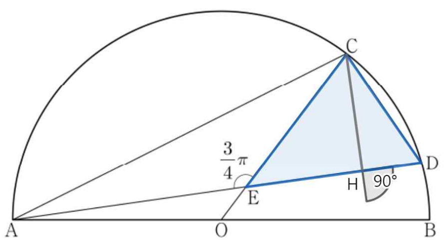
$\overline{BM}=\sqrt{4+9-12\times\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{BM}\times\overline{MD}$

$\therefore\ \overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

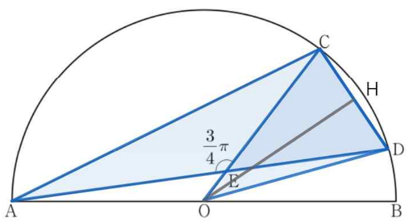
30. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고 $\overline{CE}=4$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle CEA=\frac{3}{4}\pi$ 이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}=k\sqrt{2}$일 때, k의 값을 구하시오.





점 C에서 선분 ED에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH}=\overline{CH}=2\sqrt{2}$, $\overline{HD}=\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\sqrt{10}$



$\angle CAD=\theta$라 하고

점 O에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면 원주각과 중심각의 성질에 의해 $\angle COD=2\theta$이고 삼각형 ODC는 이등변삼각형이므로 $\angle COH=\theta$, $\angle OCH=\frac{\pi}{2}-\theta$

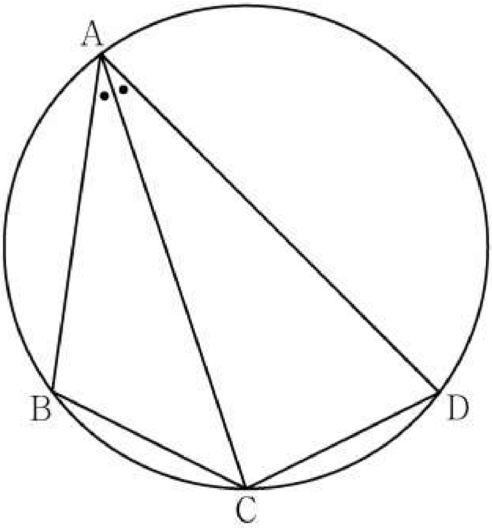
$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{4}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi},\ \overline{AC}=4\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$$

31. 그림과 같이 사각형 $ABCD$가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



① $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

$\overline{BC}=\overline{CD}=x$

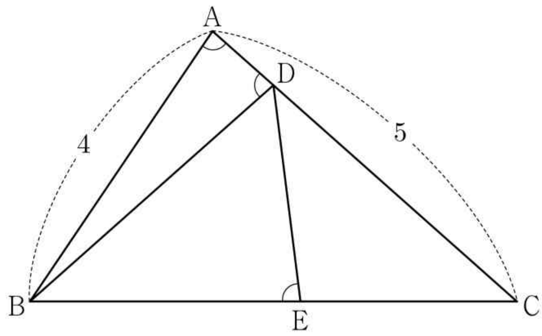
$$\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)$$
$$=\frac{5^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\frac{7^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times7\times3\sqrt{5}}$$

$x=\sqrt{10}$,

$$\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{50}=2R,\ R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

32. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\dfrac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC위의 점 E에 대하여 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$일 때, 선분 DE의 길이는?



① $\dfrac{7}{3}$ ② $\dfrac{5}{2}$ ③ $\dfrac{8}{3}$
④ $\dfrac{17}{6}$ ⑤ 3

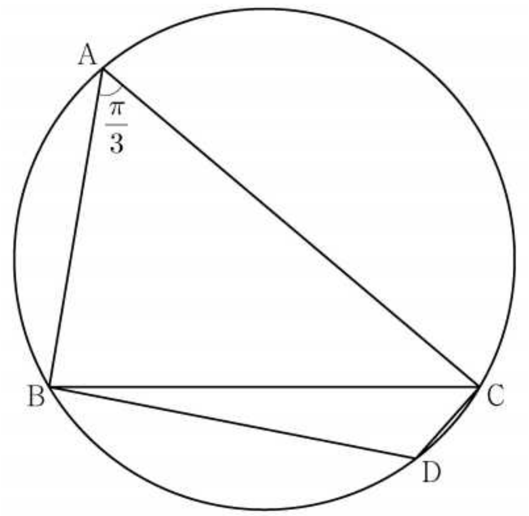
$\overline{AD}=1$, $\overline{BD}=\overline{CD}=4$

$$\overline{BC}=\sqrt{16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{8}}=6$$

$$\overline{DE}^2-\left(\frac{1}{8}\overline{DE}\right)^2=4^2-3^2$$

$$\overline{DE}=\frac{8}{3}$$

33. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A = \frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD) = \frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD} + \overline{CD}$의 값을 구하시오.



$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)} = 4\sqrt{7},\ \overline{BD} = 8$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 4\sqrt{7},\ \overline{BC} = 2\sqrt{21}$$

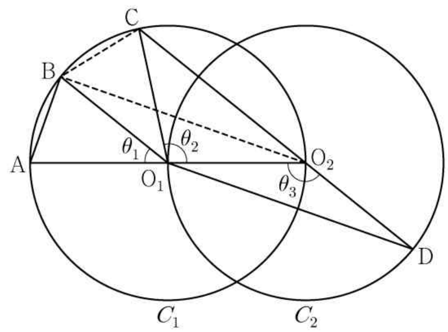
$\overline{CD} = x$

$$(2\sqrt{21})^2 = x^2 + 64 - 2 \times 8 \times x \times \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$x = 2$

$\overline{BD} + \overline{CD} = 10$

34. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이 때, $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$ 이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와
> 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

가 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AO_2} = \sqrt{k^2 + (2\sqrt{2}k)^2} = 3k$

나 $\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

다

$k^2 = 8k^2 + \overline{O_2C}^2 - 2 \times 2\sqrt{2}k \times \overline{O_2C} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{O_2C} = \dfrac{7}{3}k$

$f(p) \times g(p) = 3 \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \times \dfrac{7}{3} \times \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{56}{9}$

35. $a_2 = -4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n = a_n + a_{n+1} (n \geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$라 하자. $n(A \cap B) = 3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은?

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$a_1 = -4 - d,\ a_2 = -4,\ a_3 = -4 + d,$
$a_4 = -4 + 2d,\ a_5 = -4 + 3d$

$b_1 = -8 - d,\ b_2 = -8 + d,\ b_3 = -8 + 3d$
$b_4 = -8 + 5d,\ b_5 = -8 + 7d$

$-4 - d = -8 + d,$
$-4 + d = -8 + 3d,$
$-4 + 3d = -8 + 5d,\ \ d = 2,\ a_{20} = 32$

$-4 - d = -8 + 3d,$
$-4 + d = -8 + 5d,$
$-4 + 3d = -8 + 7d,\ \ d = 1,\ a_{20} = 14$

$a_{20} = 32 \text{ or } 14$

36. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.

$a_7 = 13k$ (k는 자연수)

$\sum_{k=1}^{7} S_7 = 7a_1 + 6a_2 + 5a_3 + 4a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7$
$= 7(a_7 - 6d) + 6(a_7 - 5d) + \cdot\cdot\cdot + a_7$
$= 28a_7 - 112d = 644$

$k = \frac{644 + 112d}{28 \times 13} = \frac{23 + 4d}{13}$, $k = 3$, $d = 4$

$a_2 = a_7 - 5d = 39 - 20 = 19$

37. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$이다.

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

$a_7 + a_8 + \cdot\cdot\cdot + a_{12}$
$= 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12}$

$a_7 + a_9 + a_{11} + a_2 + a_4 = 6 + |a_6|$

$5a_6 + 3 = |a_6|$, $a_6 = -\frac{1}{2}$

$\therefore a_{10} = \frac{23}{2}$

38. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합을 구하시오.

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$a_m + a_{m+3} = 0$

$-90 + (m-1)d + (m+2)d = 0$

$d = \dfrac{90}{2m+1}$

$m=1,\ d=30$
$m=2,\ d=18$
$m=4,\ d=10$
$m=7,\ d=6$
$m=22,\ d=2$

$d=10,\ 6,\ 2$일 때, 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 문제의 조건에 해당하는 d의 값의 합은 48

39. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5} a_{2n-1}$의 값을 구하시오.

(가) $|a_1|=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$ 이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$\sum_{k=1}^{n} |a_k| = 2(2^n - 1),\ |a_{n+1}| = 2^{n+1}$

$-2,\ -4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdots,\ 512,\ -1024$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 678$

40. 수열 $\{a_n\}$은 $a_2 = -a_1$이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & \left(\begin{array}{l}\sqrt{n}\text{이 자연수이고} \\ a_n > 0\text{인 경우}\end{array}\right) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

$n=4$, $n=9$일 때 주의 하면 된다.

$a_{10} = -4$

$a_2 = a$라 하면 $a_4 = a+2$

	a_5	a_9		a_{10}
$a+2>0$	$a_4 - 2a_2 = 2-a$	$6-a$	$6-a>0$	$a_9 - 3a_3 = 3-4a$
			$6-a \leq 0$	$7-a$
$a+2 \leq 0$	$a+3$	$a+7$	$a+7>0$	$a_9 - 3a_3 = 4-2a$
			$a+7 \leq 0$	$a+8$

1) $3-4a = -4$, $a = \frac{7}{4}$

2) $7-a = -4$, $a = 11$

3) $4-2a = -4$, $a = 4$

$a+2 \leq 0$여야 하므로 문제의 조건에 맞지 않다.

4) $a+8 = -4$, $a = -12$

$a_1 = 12$ or -11 or $-\frac{7}{4}$

$12 \times 11 \times \frac{7}{4} = 231$

41. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$ 이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

$a_{n+1} - a_n = -\frac{2}{3}k$ or $a_{n+1} = -ka_n$

a_5	a_4	a_3	a_2
0	0	0	
		$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$
			$\frac{4}{3}k$

$a_3 = 0$ 이면 $a_2 \times a_3 = 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2 = -\frac{2}{3}$ 인 경우

$a_2 = -\frac{2}{3} = -k^2$, $k^2 = \frac{2}{3}$

$a_2 = -\frac{2}{3} = \frac{1}{3}k$, $k = -2$ 는 k가 양수이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2 = \frac{4}{3}k$ 이면 $a_2 \times a_3 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

a_5	a_4	a_3	a_2
0	$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3k}$
			$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k$
		$\frac{4}{3}k$	$-\frac{4}{3}$
			$2k$

$a_2=\frac{2}{3k}$, $a_2=\frac{2}{3k}=-k^2$ 이면 $k<0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=\frac{2}{3k}=\frac{1}{3}k$, $k^2=2$

$a_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=-k^2$ 이면 $a_2\times a_3>0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=\frac{1}{3}k$, $k=2$

$a_2=-\frac{4}{3}=-k^2$, $k^2=\frac{4}{3}$

$a_2=-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}k$, $k=-4<0$ 문제의 조건에 맞지 않다.

나머지 경우는 $a_2\times a_3>0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2^2+2=8$

42. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (|a_n|\text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } |a_n|\text{이 짝수}) \end{cases}$$
(나) $|a_m| = |a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

$|a_3| = |a_5|$

$a_3 = 4k,\ a_5 = k,\ k = 0$

$a_2 = 3,\ a_1 = 6$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	0	
			3	6

$a_2 = 0$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

$a_3 = 2k,\ a_4 = k,\ a_5 = k-3$ (단, k는 홀수)
$a_3 = 2k,\ a_4 = k,\ a_5 = k-3$

$|2k| = |k-3|,\ k = -3 \text{ or } 1$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-6	-3	-6	-12	-24
			-12	-9
			-3	
-2	1	2	4	8
				7
			5	10

$a_2 = -3$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

$a_3 = k$(단, k는 홀수)

$a_3 = k,\ a_4 = k-3,\ a_5 = \dfrac{k-3}{2}$

$|k| = \left|\dfrac{k-3}{2}\right|,\ k = -3 \text{ or } 1$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-3	-6	-3	-6	
-1	-2	1	2	

위의 경우 모두 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

64

43. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값을 합을 구하시오.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k \ (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k \ (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$			

$k=2$ 이면 $a_3=0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k=1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	-2	1	-6	1	-10

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$

$k \ge 3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$		

$k=4$ 이면 $a_3=0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k=3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
3	-2	-1	2	-9	-2

$k \ge 5$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$	$16-3k$	

$k=5$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

5	-2	-3	-2	1	$a_6 < 0$

$k \geq 6$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$	$16-3k$	$26-4k$

$a_6 > 0$, $26-4k > 0$, $k < \dfrac{13}{2}$

$k = 6$

$k \geq 7$이면 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

44. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 \ (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n \quad (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

$a_2=4k,\ a_3=2k,\ a_4=k$
$5k=40,\ k=8,\ a_1=31$
$a_2=32,\ a_1=64$ or 31

$a_2=2k$(단, k는 홀수), $a_3=k,\ a_4=k+1$
$3k+1=40,\ k=13$
$a_2=26,\ a_1=52$ or 25

$a_2=k$(단, k는 홀수), $a_3=k+1,\ a_4=\frac{k+1}{2}$
$k+\frac{k+1}{2}=40$, 자연수 k는 존재하지 않는다.

$31+25+64+52=172$

45. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

a_6이 짝수이면, $a_7=\frac{1}{2}a_6$; $a_6=2$

a_6이 홀수이면, $a_7=2^{a_6}$, $a_6=1$

1) $a_6=1$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
32	16	8	4	2	1
6	3				
8	4	2	1		
2	1				

2) $a_6=2$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
64	32	16	8	4	2
5					
12	6	3			
16	8	4	2	1	
3					
4	2	1			
1					

153

46. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

$a_1=0$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$ 이다.

$a_2=\dfrac{1}{k+1}>0$

$a_3=\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k}<0$

$a_4=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}=\begin{cases} 0 & (k=1) \\ \dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}>0 & (k\neq 1) \end{cases}$

$k=1$이면 $a_{22}=0$

$a_5=\dfrac{2}{k+1}-\dfrac{2}{k}<0$

$a_6=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}$

$=\begin{cases} 0 & (k=2) \\ \dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}>0 & (k\neq 1,\ k\neq 2) \end{cases}$

$k=2$ 이면 $a_{22}\neq 0$

$a_7=\dfrac{3}{k+1}-\dfrac{3}{k}<0$

$a_8=\dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k}=\begin{cases} 0 & (k=3) \\ \dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k} & (k\neq 1,\ 2,\ 3) \end{cases}$

$k=3$ 이면 $a_{22}=0$

• • •

$\therefore\ k=1,\ 3,\ 10$ 일 때, $a_{22}=0$

47. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다. (단, r는 $0<\lvert r\rvert<1$인 상수이다.) (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (\lvert a_n\rvert<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (\lvert a_n\rvert \ge 5) \end{cases}$ 이다.

$\lvert a_m\rvert \ge 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값을 구하시오.

$a_4=r,\ a_8=r^2\ \ 0<\lvert r\rvert<1$

$a_5=r+3,\ a_6=r+6,\ a_7=-\frac{1}{2}r-3,$

$a_8=-\frac{1}{2}r=r^2$

$r=-\frac{1}{2}=a_4,\ a_3=-\frac{7}{2},\ a_2=7,\ a_1=-14$

$a_5=\frac{5}{2},\ a_6=\frac{11}{2},\ a_7=-\frac{11}{4},\ a_8=\frac{1}{4}$

$a_9=\frac{13}{4},\ a_{10}=\frac{25}{4},\ a_{11}=-\frac{25}{8},\ a_{12}=-\frac{1}{8}$

$\therefore p=26,\ a_1=-14$

48. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.

(가) $a_7=40$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
		120	40	160	200
	$3a$	a	$a=10$		
	30	10	40	50	90
$3a$	a	$4a$	$a=8$		
		32	40	72	24

a_4가 3의 배수이면 a_8이 3의 배수

a_5가 3의 배수이면 a_9이 3의 배수

a_3이 3의 배수이면 a_7이 3의 배수인데 $a_7=40$ 이므로 a_3이 3의 배수이면서 문제의 조건에 맞는 경우는 존재하지 않는다.

a_2이 3의 배수이면 a_6이 3의 배수이고 이 경우는 첫 번째에 계산 했으므로 더 이상 계산하지 않아도 된다.

$\therefore a_9=200 \text{ or } 90 \text{ or } 24$

49. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2}$ 는 가정에 모순

$a_6 = -2a_5 - 2$, $a_5 + a_6 = -a_5 - 2 = 0$, $a_5 = -2$

$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2}$

$a_6 = 2a_5$, $a_5 + a_6 = 3a_5 = 0$, $a_5 = 0$

$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1$ 는 가정에 모순

$a_6 = -2a_5 + 2$, $a_5 + a_6 = -a_5 + 2 = 0$, $a_5 = 2$

$a_5 = 0$, $a_4 = -1$ or 0 or 1

$a_4 = -1$ 이면 $a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

$a_4 = 0$, $a_3 = 0, 1$ ($a_3 = -1$ 이면 $\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$)

$a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$

$a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$

$a_3 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$

$a_4 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$,
$a_1 = \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 = \frac{9}{2}$

다음과 같은 함수의 그래프를 이용해서 풀 수도 있다.