1. 두 실수 a, b가 $3^{a+b}=4,\ 2^{a-b}=5$를 만족할 때, $3^{a^2-b^2}$의 값을 구하시오.

$3^{a^2-b^2}=\left(3^{a+b}\right)^{a-b}=4^{a-b}=25$

2. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오.

$2^2 \times 2^{-2}=1$

3. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값을 구하시오.

$\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}=2^2=4$

4. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값을 구하시오.

$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}=2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$
$=2^2=4$

5. 실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은?

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{17}{4}$ ④ $\dfrac{26}{5}$ ⑤ $\dfrac{37}{6}$

$\dfrac{4^a+1}{4^a-1}=-2$ 에서 $4^a=\dfrac{1}{3}$ 이므로
$4^a+4^{-a}=\dfrac{10}{3}$

6. 조개류는 현탁물을 여과한다. 수온이 t(℃)이고 개체중량이 $w(g)$일 때, A조개와 B조개가 1시간 동안 여과하는 양(L)을 각각 $Q_A,\ Q_B$라고 하면 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.
$Q_A=0.01t^{1.25}w^{0.25}$ 수
$Q_B=0.05t^{0.75}w^{0.30}$
온이 20℃이고 A조개와 B조개의 개체 중량이 각각 $8g$일 때, $\dfrac{Q_A}{Q_B}$의 값은 $2^a \times 5^b$이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① 0.15 ② 0.35 ③ 0.55
④ 0.75 ⑤ 0.95

$\dfrac{Q_A}{Q_B}=\dfrac{0.01\times 20^{1.25}\times 8^{0.25}}{0.05\times 20^{0.75}\times 8^{0.30}}$
$=5^{-1}\times(20)^{0.5}\times 8^{-0.05}=2^{0.85}\times 5^{-0.5}$
$\therefore\ a+b=0.35$

7. 함수 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$에 대하여 옳은 것을 <보기>에서 모두 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $f(x)+f(1-x)=1$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} f\left(\dfrac{k}{101}\right)=50$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\dfrac{4^{\frac{1}{2}}}{4^{\frac{1}{2}}+2}=\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}$

$=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{4}{4+2\times 4^x}$

$=\dfrac{4^x}{4^x+2}+\dfrac{2}{2+4^x}=1$

ㄷ. ㄴ에 의해 참

8. $1\le m\le 3$, $1\le n\le 8$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{n^m}$이 자연수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$\sqrt[3]{n^m}=n^{\frac{m}{3}}$ 이므로

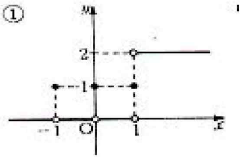
1) $n=1$ 또는 $n=8$ 일 때,
$m=1\sim 3$ 6가지

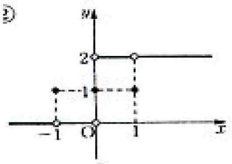
2) $m=3$ 일 때,
$n=1\sim 8$ 8가지

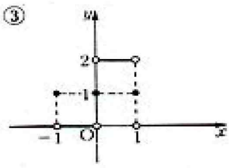
3) 1), 2)의 교집합 $(3,\ 1)$, $(3,\ 8)$ 이므로

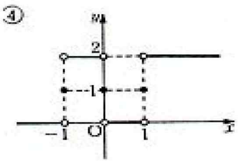
12가지

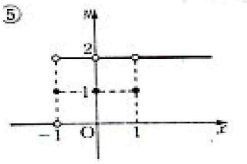
9. 실수 x에 대하여 $t^2=x^3-x$를 만족시키는 실수 t의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은?

①


②


③


④


⑤


실수 t의 개수를 구해야 하므로

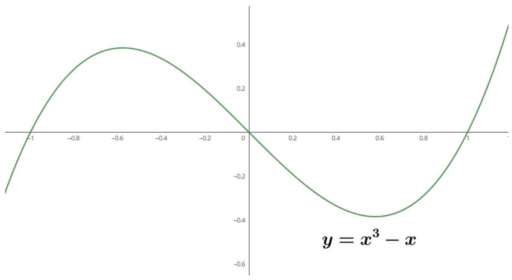
$t^2=a$라 단순화하여 생각해보면

$a>0$일 때, 실수 t의 개수는 2개

$a=0$일 때, 실수 t의 개수는 1개

$a<0$일 때, 실수 t의 개수는 0개

$y=x^3-x$의 그래프가 다음과 같으므로



$$f(x)=\begin{cases}0 & (x<-1)\\ 1 & (x=-1)\\ 2 & (-1<x<0)\\ 1 & (x=0)\\ 0 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\\ 2 & (1<x)\end{cases}$$

∴ ④

10. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값을 구하시오.

m^{12}의 n제곱근을 x라 하면 $x^n = m^{12}$

$$x = m^{\frac{12}{n}}$$

$m = 2, 3, 5, 6, 7$일 때, $m^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 5

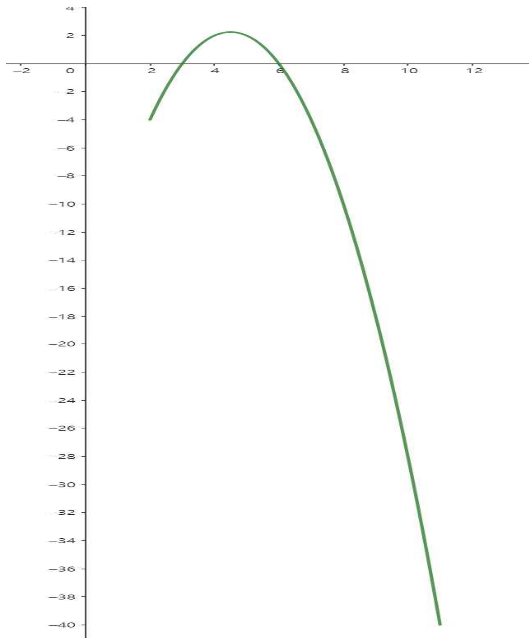
$m = 4$, $4^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$m = 8$, $8^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 8

$m = 9$, $9^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$$\sum_{m=2}^{9} f(m) = 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8 = 47$$

11. 자연수 n이 $2 \leq n \leq 11$일 때, $-n^2 + 9n - 18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.



$-n^2 + 9n - 18 = -(n-3)(n-6)$

$3 < n < 6$, $n = 4$
$6 < n \leq 11$, $n = 7$ or 9 or 11

12. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.

(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

n은 짝수이고 $x=\pm 2^{\frac{6}{n}}$

$f(x)=\left(x-2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x+2^{\frac{6}{n}}\right)$

$f(0)=-2^{\frac{12}{n}}$

$n=2$ or 4 or 6 or 12

24

13. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

$3^{\frac{f(n)}{8}}\times\left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-9$

$3^{\frac{f(n)}{8}}=3,\ f(n)=8$

$f(1)=f(3)=8$

$k-1=8,\ k=9$

출제 예상 문제

14. $(\sqrt[3]{2\sqrt{3}})^6$의 값을 구하시오.

$(\sqrt[3]{2\sqrt{3}})^6 = \left(2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{6}}\right)^6 = 2^2 \times 3 = 12$

15. $\left(\frac{2^{\sqrt[3]{3}}}{2}\right)^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ 의 값을 구하시오.

$\left(2^{\sqrt[3]{5}-1}\right)^{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} = 2^{(\sqrt[3]{3})^3-1} = 2^2 = 4$

16. $\left(2^{\sqrt[3]{3}} \times 2\right)^{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$의 값을 구하시오.

$\left(2^{\sqrt[3]{3}} \times 2\right)^{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = \left(2^{\sqrt[3]{3}+1}\right)^{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} = 2^4$

17. $\sqrt[3]{-27} \times \sqrt{(-2)^2}$의 값을 구하시오.

$\sqrt[3]{-27} \times \sqrt{(-2)^2} = -6$

18. $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{-8}}$의 값을 구하시오.

$\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[3]{-8}} = \frac{4}{-2} = -2$

19. 세 실수 a, b, c에 대하여
$2^a = 3^b = 6^c$이고 $bc = 3$일 때,
$\sqrt[3]{2^{a(b+c)}}$의 값을 구하시오.

$2^{ab} = 6^{bc} = 6^3$

$2^{ac} = 3^{bc} = 3^3$

$2^{a(b+c)} = (6 \times 3)^3$

$\sqrt[3]{2^{a(b+c)}} = 18$

20. $2 \le n \le 10$, $2 \le m \le 10$인 자연수 n, m에 대하여 $nm-6n$의 n제곱근 중 서로 다른 실수인 것의 개수를 a라 하고, $nm-6n$의 m제곱근 중 서로 다른 실수인 것의 개수를 b라 하자. $a+b=2$가 되도록 하는 n, m의 모든 순서쌍 (n, m)의 개수를 구하시오.

$nm-6n=n(m-6)$ 은
$m<6$ 일 때 $n(m-6)<0$
$m=6$ 일 때 $n(m-6)=0$
$m>6$ 일 때 $n(m-6)>0$ 이므로

$a+b=2$ 인 경우는

$m<6$ 일 때, m, n은 모두 홀수
$m=6$ 일 때 n은 자연수
$m>6$ 일 때, m, n은 모두 홀수 이다.

$m<6$ 일 때, m, n은 모두 홀수인 경우는 8
$m=6$ 일 때 9
$m>6$ 일 때 m, n은 모두 홀수인 경우 8

21. 10 이하의 자연수 n에 대하여 $n(n-5)$의 세제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$, 네제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$이라 할 때, $f(n) \ge g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

$f(n)=1$

$$g(n)=\begin{cases} 1 & (n=5) \\ 2 & (5<n\le 10) \\ 0 & (1\le n<5) \end{cases}$$

$f(n) \le g(n)$, $1 \le n \le 5$

$\frac{5(1+5)}{2}=15$

22. 자연수 n이 $2 \le n \le 20$일 때, $\log_2|n-6|$의 n제곱근 중 양의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 α, $2^{n-6}-4$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n의 개수를 β라 할 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.

$n \ne 5, 6, 7$
$\alpha=16$

$n<8$
$n=3, 5, 7$

$9 \le n$
$n=10, 12, 14, 16, 18, 20$

$\beta=9$

$\alpha+\beta=25$

23. $1 \le |n| < m \le 10$을 만족시키는 두 정수 m, n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

> (가) $(m^2-8m+15)$의 (n^2+2)제곱근 중 실수인 것의 개수는 1이다.
>
> (나) $(-n)$의 $(m+1)$제곱근 중 실수인 것의 개수는 2이다.

(나)에 의해 n은 음수이고 m은 홀수인 자연수

(가)에 의해 $m=3 \text{ or } 5$일 때 n은 모두 가능

$m=1 \text{ or } 7 \text{ or } 9$일 때는 $|n|$은 홀수

$m=3, n=-1, -2$

$m=5, n=-1, -2, -3, -4$

$m=7, n=-1, -3, -5$

$m=9, n=-1, -3, -5, -7$

13쌍

24. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2가 되도록하는 자연수 k의 값을 구하시오.

> $(\sqrt{2})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -4이다.

$x^4=(\sqrt{2})^{f(n)}$

$x=\pm 2^{\frac{f(n)}{8}}$

$2^{\frac{f(n)}{8}} \times \left(-2^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-4$

$2^{\frac{f(n)}{8}}=2, f(n)=8$

$f(1)=f(4)=8$

$k+4=8, k=4$

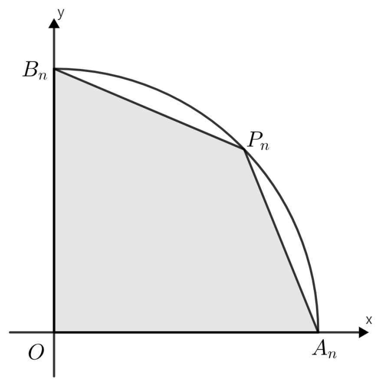
25. 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{m}\times\sqrt[6]{n}=\sqrt{18}$를 만족시키는 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

$m^2n=18^3=2^3\times3^6$

$m^2=2\times4=8$

m^2을 선택하는 방법은 2^0 or 2^2중에 하나를 선택하고 3^0 or 3^2 or 3^4 or 3^6중에 하나를 선택하면 되므로 2×4이고 나머지는 다 n에 주면 되므로 순서쌍의 개수는 위와 같다.

26. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원점 O를 중심으로 하고 두 점 $A_n\left(512^{\frac{1}{n}}, 0\right)$, $B_n\left(0, 512^{\frac{1}{n}}\right)$을 지나는 부채꼴 OA_nB_n의 호 $\overset{\frown}{A_nB_n}$ 위에 점 P_n이 있다. 사각형 $OA_nP_nB_n$의 넓이의 최댓값을 $f(n)$이라 할 때, $f(n)$이 1보다 큰 자연수가 되도록하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.



사각형 $OA_nP_nB_n$의 넓이가 최댓값을 가질 때는 두 점 $A_n\left(512^{\frac{1}{n}}, 0\right), B_n\left(0, 512^{\frac{1}{n}}\right)$을 이은 기울기 -1인 직선에 평행한 직선이 부채꼴 OB_nA_n에 접하는 접점의 좌표가 $P_n\left(512^{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}, 512^{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$일 때이다.

따라서 넓이의 최댓값 $f(n)$은

$f(n)=2\times\triangle OP_nA_n$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)\times512^{\frac{1}{n}}\times\left(512^{\frac{1}{n}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$=2^{\frac{18}{n}-\frac{1}{2}}$

이므로 n은 4 또는 12일 때, $f(n)$은 자연수이다.

$4+12=16$

27. $2 \le m \le 30$, $-5 \le n \le 5$인 정수 m, n에 대하여 $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}$이 양의 정수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 a, 음의 정수가 되도록 하는 순서쌍 (m, n)의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

$\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}$이 양의 정수가 되려면

$n=-2k$꼴 이어야 하므로

$n=0$일 때, $2 \le m \le 30$

$n=-2$일 때, $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}=2^{\frac{12}{m}}$ 이므로

$m=2, 3, 4, 6, 12$

$n=-4$일 때, $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}=2^{\frac{24}{m}}$ 이므로

$m=2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

$a=41$

$\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}$이 음의 정수가 되려면

$n=-(2k-1)$꼴 이어야 하므로

$n=-1$일 때, $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}=(-2)^{\frac{6}{m}}$이므로

$m=3$

$n=-3$일 때, $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}=(-2)^{\frac{18}{m}}$이므로

$m=3, 9$

$n=-5$일 때, $\sqrt[m]{\left(-\frac{1}{64}\right)^n}=(-2)^{\frac{30}{m}}$이므로

$m=3, 5, 15$

$b=6$

$a+b=47$