

나머지 정리

◆ 나머지 정리

- 다항식 $f(x)$ 를 x 에 대한 일차식 $x-a$ 로 나눈 나머지는 $f(a)$
- 다항식 $f(x)$ 를 x 에 대한 일차식 $ax+b$ 로 나눈 나머지는 $f\left(-\frac{b}{a}\right)$

인수정리

◆ 인수정리

- 다항식 $f(x)$ 가 x 에 대한 일차식 $x-a$ 로 나누어 떨어지면 $f(a)=0$
- 또, 역으로 $f(a)=0$ 이면
다항식 $f(x)$ 는 일차식 $x-a$ 로 나누어 떨어지고
 $f(x)$ 는 $x-a$ 를 인수로 갖고
 $f(x)=(x-a)Q(x)$
- 삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용하여 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
 - 1) 다항식의 식의 값을 0으로 만드는 숫자를 찾는다.
 - 상수항을 최고차항의 계수로 나눈 숫자의 ±약수를 작은 수부터 대입하여 찾는다.
 - 2) 이차 이하의 식이 나올 때까지 위의 과정을 반복한다.

함수의 극한값의 계산

◆ $\infty - \infty$ 꼴

- 다항식은 최고차항으로 묶는다.
- $\infty - \infty = 0$ 일 때 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◆ $\infty \times 0$ 꼴

- 적당히 변형하면

$$\infty \times c, \frac{\infty}{c}, \frac{c}{\infty}, \frac{c}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \text{ 등의}$$

꼴로 나타낼 수 있다.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 가 발산할 때, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$

가 수렴하려면?

※ 미정계수의 결정

$$- \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a \quad (a \text{는 실수}) \text{ 이고}$$

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ 이면

$$- \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = a \quad (a \text{는 } 0 \text{이 아닌 실수})$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면

함수의 극한값의 계산

◆ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

- 다항식 $f(x), g(x)$ 일 때,
최고차항의 계수를 비교한다.

◆ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

- 다항식 $f(x), g(x)$ 일 때,
최저차항의 계수를 비교한다.

함수의 극한의 대소 관계

◆ 두 함수 $f(x), g(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 가 존재하고

a 에 가까운 모든 x 의 값에 대하여

- $f(x) \leq g(x)$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

- $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ 이고

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \text{이면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$$

함수의 극한값의 계산

◆ $\frac{0}{0}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모, 분자를
인수분해한 다음 약분한다.
- 무리함수는 먼저 분모, 분자 중
근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◆ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모의 최고차항으로
분모, 분자를 나눈다.
- 무리함수는 근호 안의 x 의 차수는
반으로 생각하고 분모의 최고차항으로
분모, 분자를 나눈다.

1. 다음 식을 성립하게 하는 상수 a, b 의
곱 ab 의 값은?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{3}$$

- ① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

2. 두 상수 a, b 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + ax + b}{x - 3} = 14 \text{ 일 때, } |a + b| \text{의 값을 구하시오.}$$

3. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - c}{x - 1} = -1$ 을 만족시킬 때, ab 의 값을 구하시오

4. 함수 $f(x) = x^2 + ax$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ 를 만족시킬 때, 상수 a 의 값은?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

5. 다항함수 $f(x)$ 와 두 자연수 m, n 이

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = a \text{ 를 모두}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = b, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 9$$

만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $m \geq n$

ㄴ. $ab \geq 9$

ㄷ. $f(x)$ 가 삼차함수이면 $am = bn$ 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$

(나) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

7. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = x$ 의 한 근이 -2 일 때, $f(1)$ 의 값을 구하시오.

8. 다항함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x} = 2$
 (나) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -7$

9. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 를 만족시킨다. $f(1) \leq 12$ 일 때, $f(2)$ 의 최댓값을 구하시오.

10. 삼차함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

11. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 최댓값을 구하시오.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = -4$$

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 $f(-1)=2, f(0)=0, f(1)=-2$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

13. 다항함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = -11, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -9$

를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow \infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)$ 의 값을 구하시오.

14. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5,$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{3}$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값을 구하시오.

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 4x^3 + 3x^2}{x^{n+1} + 1} = 6,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^n} = 4$$

인 자연수 n 이 존재한다.

16. 다항함수 $g(x)$ 에 대하여 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2x}{x - 1}$ 가 존재한다. 다항함수 $f(x)$ 가 $f(x) + x - 1 = (x - 1)g(x)$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)}{x^2 - 1}$ 의 값을 구하시오.

17. 함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)f(x) = 1$ 을 만족시킬 때, $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x) = a$ 이다. $20a$ 의 값을 구하시오.

18. 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x - 2)}{x^2 - 2x} = 4$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

19. 함수 $f(x)$ 에 대하여
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 5$ 일 때,

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\{f(x)\}^2 - 9}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

20. 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 두 식을 만족시킨다.
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x - 2)^2} = 3, f(3) = 5$
 이때, $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2} + 3x}{x + 5}$ 의 값을 구하시오.

22. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x} - x}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$ 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

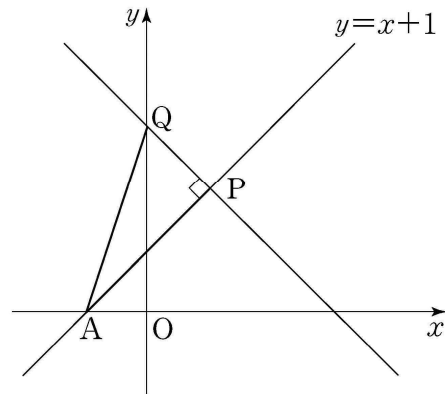
24. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$ 의 값을 구하시오.

25. 두 상수 a, b 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2} = b$ 일 때, $10a+4b$ 의 값을 구하시오.

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{\sqrt{x+8}-3}$ 의 값을 구하시오.

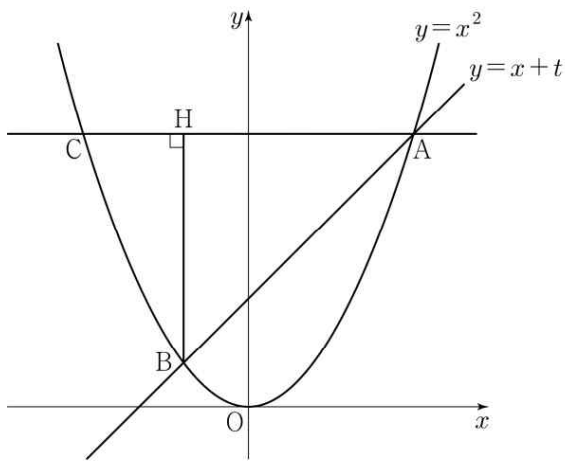
27. 곡선 $y = x^3$ 위의 점 $P(t, t^3)$ 에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = a$ 일 때, $30a$ 의 값을 구하시오.

28. 그림과 같이 직선 $y = x + 1$ 위에 두 점 $A(-1, 0)$ 과 $P(t, t+1)$ 이 있다. 점 P 를 지나고 직선 $y = x + 1$ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$ 의 값은?

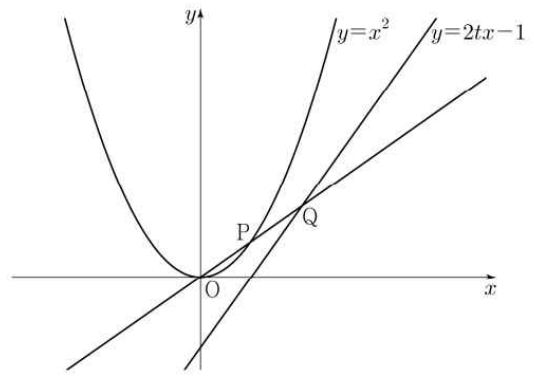


- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

29. 실수 $t(t > 0)$ 에 대하여 직선 $y = x + t$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 C , 점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t}$ 의 값을 구하시오. (단, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.)



30. 그림과 같이 실수 $t(0 < t < 1)$ 에 대하여 곡선 $y = x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y = 2tx - 1$ 과 거리가 최소인 점을 P 라 하고, 직선 OP 가 직선 $y = 2tx - 1$ 과 만나는 점을 Q 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PQ}}{1-t}$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)



- ① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

31. 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 가 함수 $y=|x^2-1|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

32. 두 자연수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x + 1 & (x \leq 2) \\ a(x-2)(x-b) + 9 & (x > 2) \end{cases}$$

이다. 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 만나는 점의 개수를 $g(t)$ 라 하자.

$$g(k) + \lim_{t \rightarrow k^-} g(t) + \lim_{t \rightarrow k^+} g(t) = 9$$

를 만족시키는 실수 k 의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 에 대하여 $a+b$ 의 최댓값은?

- ① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

33. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$

$$\text{가 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - (x-a)}{f(x) + (x-a)} = \frac{3}{5} \text{ 을 만족}$$

시킨다. 방정식 $f(x)=0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $|\alpha-\beta|$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.)

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

34. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 a, b 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오.

모든 실수 α 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

35. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2)$
 ($n = 1, 2, 3, 4$)

$g(5)$ 의 값은?

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

출제 예상 문제

36. 두 상수 a, b 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \left(\frac{2}{x+1} - a \right) = b \text{ 일 때,}$$

$a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

37. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^2 - 1} + 3x}{2x - 3}$ 의 값을
구하시오.

38. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(3)$ 의 최댓값을 구하시오.

$$(가) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)| - |f(1)|}{|x-1|} = f(1) + 2$$

$$(나) f(2) = 2$$

39. 사차함수 $f(x)$ 가

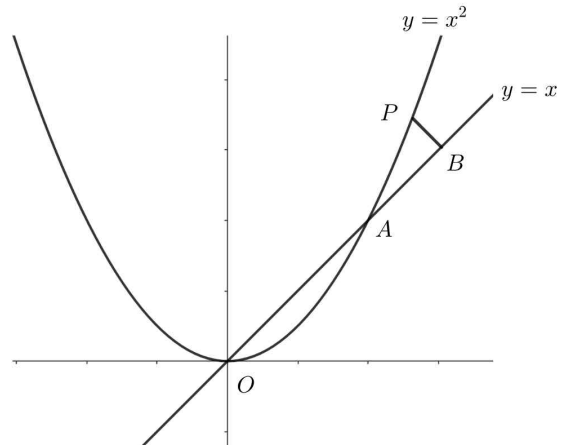
$$\sum_{k=1}^4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(kx)}{x-1} = 32 \text{를 만족시킬 때,}$$

$f(5)$ 의 값을 구하시오.

40. 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=x^2$ 이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A 라 하자. 곡선 $y=x^2$ 위의 A 가 아닌 점을 $P(t, t^2)$ 이라 할 때, 점 P 에서 $y=x$ 에 내린 수선의 발을 B 라

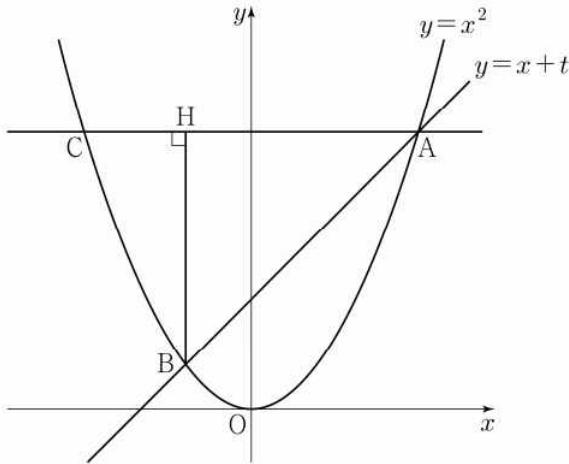
하자. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$



41. 실수 $t(t > 0)$ 에 대하여 직선 $y = x + t$ 와 곡선 $y = x^2$ 이 만나는 두 점을 A, B 라 하자. 점 A 를 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점 중 A 가 아닌 점을 C , 점 B 에서 선분 AC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{AB} - \sqrt{2} \times \overline{CH}}{t}$ 의 값은?(단, 점 A 의 x 좌표는 양수이다.)

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



42. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 2인 모든 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(3)$ 의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^5} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

(나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} = 4$

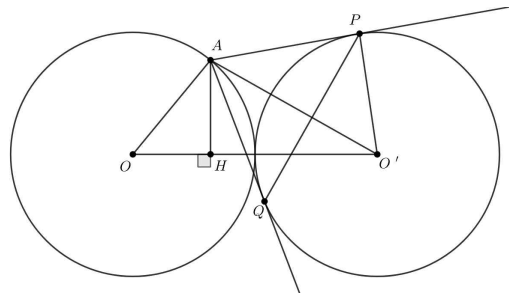
43. 함수 $f(x) = x^3 - 12x^2 + 4x$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{x}$ 의 값을 구하시오.

44. 이차 이상의 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여
 $\{g(x) + x^4\}f'(x) = \{f(x)\}^2$ 이 항상 성립하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-2)$ 의 값은?

(가) $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 1이고 $f(2) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|g(x)|}{x^n} = 1$ 인 4이하의 자연수 n 이 존재한다.

- ① -48 ② -50 ③ -52
 ④ -54 ⑤ -56

45. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 O, O' 이 외접하고 있다. 원 O 위의 점 A 에서 원 O' 에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q 라 하고 점 A 에서 선분 OO' 에 내린 수선의 발을 H 라 하자. $\overline{OH} = x$ 라 할 때, $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PQ}^2}{1-x}$ 의 값을 구하시오.



46. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{f(x)+x^2} = 2 \text{을 만족시킬}$$

때, $f(5)$ 의 값을 구하시오.

47. 다항함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족
시 킨 다 .

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{x^3} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{x} = 7$$

(나) 방정식 $h(x) = 3x$ 의 실근은
0, 2뿐이다.

다항식 $h(x)$ 를 이차항의 계수가 1인
서로 다른 두 이차함수 $f(x), g(x)$ 로
나눈 나머지는 모두 $2x+2$ 일 때,
 $f(5)$ 의 최댓값을 구하시오.

48. 다항함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^3 - 2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right) + 2}{x^3 + x} = 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1 \text{를 만족시킬 때,}$$

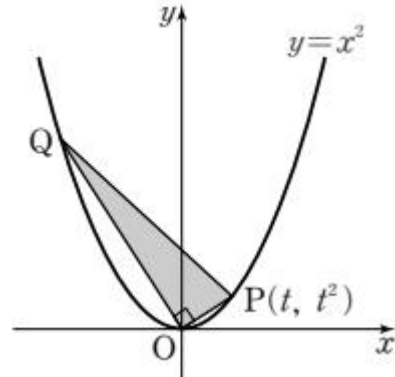
$f(5)$ 의 값을 구하시오.

49. 그림과 같이 실수 $t(0 < t)$ 에 대하여

곡선 $y = x^2$ 위의 한 점을 $P(t, t^2)$ 라 할 때, 원점 O 를 지나고 직선 OP 와 수직인 직선이 곡선 $y = x^2$ 과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 Q 라 하자. 삼각형 OPQ 의 넓이를 $S(t)$, 곡선 $y = x^2$ 과 직선 PQ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 $A(t)$ 라 할 때,

$$30 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 A(t)}{S(t)}$$

의 값을 구하시오.



50. 자연수 n 에 대하여 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$ 를 $(x-1)^n$ 으로 나눈 몫과 나머지가 모두 함수 $g(x)$ 라 할 때,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{(x-1)^4} = n + \{f(1)\}^4 \text{을}$$

만족시킨다. $f(2)$ 의 값을 구하시오.