# 나머지 정리

◈ 나머지 정리

- 다항식 $f(x)$를 $x$에 대한 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$
- 다항식 $f(x)$를 $x$에 대한 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

# 인수정리

◈ 인수정리

- 다항식 $f(x)$가 $x$에 대한 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어지면 $f(\alpha)=0$
- 또, 역으로 $f(\alpha)=0$이면

  다항식 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어지고

  $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖고

  $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$
- 삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용하여 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

  1) 다항식의 식의 값을 0으로 만드는 숫자를 찾는다.
     - 상수항을 최고차항의 계수로 나눈 숫자의 ±약수를 작은 수부터 대입하여 찾는다.
  2) 이차 이하의 식이 나올 때까지 위의 과정을 반복한다.

## 함수의 극한값의 계산

◈ $\infty-\infty$ 꼴

- 다항식은 최고차항으로 묶는다.
- $\infty-\infty=0$일 때 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◈ $\infty\times 0$ 꼴

- 적당히 변형하면

  $\infty\times c,\ \dfrac{\infty}{c},\ \dfrac{c}{\infty},\ \dfrac{c}{0},\ \dfrac{0}{0},\ \dfrac{\infty}{\infty}$ 등의 꼴로 나타낼 수 있다.

$\lim\limits_{x\to a}f(x)$가 발산할 때, $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$가 수렴하려면?

※ 미정계수의 결정

- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 실수) 이고 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 이면

- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ ($\alpha$는 0이 아닌 실수) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ 이면

## 함수의 극한값의 계산

◈ $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

- 다항식 $f(x), g(x)$일 때,
 최고차항의 계수를 비교한다.

◈ $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 꼴

- 다항식 $f(x), g(x)$일 때,
 최저차항의 계수를 비교한다.

## 함수의 극한의 대소 관계

◈ 두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여
$\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하고
$a$에 가까운 모든 $x$의 값에 대하여

- $f(x)\le g(x)$이면
 $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$
- $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고
 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$이면
 $\lim_{x\to a}h(x)=L$

## 함수의 극한값의 계산

◈ $\frac{0}{0}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모, 분자를
 인수분해한 다음 약분한다.
- 무리함수는 먼저 분모, 분자 중
 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◈ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모의 최고차항으로
 분모, 분자를 나눈다.
- 무리함수는 근호 안의 $x$의 차수는
 반으로 생각하고 분모의 최고차항으로
 분모, 분자를 나눈다.

1. 다음 식을 성립하게 하는 상수 $a,b$의 곱 $ab$의 값은?

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+ax+b}=\frac{1}{3}$$

① $-3$ ② $-2$ ③ $1$ ④ $2$ ⑤ $3$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x-b)}=\frac{1}{1-b}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ b=-2,\ a=1$

2. 두 상수 $a, b$에 대하여 $\lim_{x \to 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 14$일 때, $|a+b|$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-a)}{x-3} = 3-a = 14$$

$x^2+ax+b = (x-3)(x+11)$

$a+b = -25$

3. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-c}{x-1} = -1$을 만족시킬 때, $ab$의 값을 구하시오

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-c}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x-b)}{x-1}$$
$= 1-b = -1,\ b = 2,\ a = -3$

4. 함수 $f(x) = x^2 + ax$가 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 4$를 만족시킬 때, 상수 $a$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(x+a)}{x} = a = 4$$

5. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 $m, n$이 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^m} = 1$, $\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{x^{m-1}} = a$를 모두 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^n} = b$, $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x^{n-1}} = 9$ 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은?

〈보기〉

ㄱ. $m \geq n$

ㄴ. $ab \geq 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am = bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(x) = x^m \sim + bx^n$, $m = a$, $bn = 9$

ㄱ. 참

ㄴ. $bm \geq bn$ 참

$ab \geq 9$

ㄷ. $m = a = 3, am = 9 = bn$ 참

6. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ , $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$ 이므로

$\therefore f(x) = 2x^2 + 3x,\ f(2) = 14$

7. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=5$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=x$의 한 근이 $-2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오.

$f(x)=ax^2+5x$

$a(-2)^2+5(-2)=-2$

$a=2$

$f(1)=7$

8. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{3x}=2$ |
| (나) $\lim_{x\to 0}f(x)=-7$ |

$f(x)=x^3+6x-7$

$\therefore f(2)=8+12-7=13$

9. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$, $\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x+1}=2$를 만족시킨다. $f(1)\le 12$일 때, $f(2)$의 최댓값을 구하시오.

$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1}=2$ 에서

$b-a=1$

$2(1+a+b)\le 12$ 에서

$a+b\le 5$

$a+(a+1)\le 5,\ a\le 2$

$f(2)=3(4+2a+b)=3(3a+5)$

$f(2)$의 최댓값은 33

10. 삼차함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$

$b=-1,\ a=2$

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

$f(2)=6$

11. 상수항과 계수가 모두 정수인 두 다항함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값을 구하시오.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{x^3}=2$ |
| (나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$ |

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$이므로
$f(x)=2x^2$ 일 때, $f(2)$는 최댓값 8

12. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가
$f(-1)=2, f(0)=0, f(1)=-2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?

① $-1$ ② $-2$ ③ $-3$ ④ $-4$ ⑤ $-5$

$f(x)=x^3-3x$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-3$

13. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11,\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=-11$

$f(x)=x^3-11x^2\sim$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2-10x+a)}{x-1}=-9$

$a=0$

$\therefore f(x)=x(x-1)(x-10)$

$\therefore \lim_{x\to\infty}x\times\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-10\right)=10$

14. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$ 를 만족시킬 때,

$f(2)$의 값을 구하시오.

$$\frac{1}{x}=t$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

$f(x)=x^3+5x^2+\sim$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a)}{(x-1)(x+2)}=\frac{a+7}{3}=\frac{1}{3}$$

$a=-6$

$\therefore f(x)=(x-1)(x^2+6x-6)$

$\therefore f(2)=10$

15. 다음 조건을 만족시키는 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$$

인 자연수 $n$이 존재한다.

$n=1$일 때,

$f(x)=4x^3+3x^2+4x$

$n=2$일 때,

$f(x)=10x^3+4x^2$

$n\geq 3$ 일 때,

$f(x)=6x^{n+1}+4x^n$

$\therefore f(1)=10 \text{ or } 11 \text{ or } 14$

그러므로 $f(1)$의 최댓값은 14

16. 다항함수 $g(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2x}{x-1}$가 존재한다. 다항함수 $f(x)$가 $f(x)+x-1=(x-1)g(x)$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)}{x^2-1}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{g(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\{g(x)-1\}}{x-1}\times\frac{g(x)}{x+1}$$
$$=1$$

17. 함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}(x+1)f(x)=1$을 만족시킬 때, $\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)=a$이다. $20a$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times(x+1)f(x)$$
$$=\frac{3}{2}\times1=a$$

$20a=30$

18. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x^2-2x}=4$일 때, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-2)}{x(x-2)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=4$$
$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=8$$

19. 함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-3}{x-2}=5$일 때, $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$의 값은?

① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{27}$ ⑤ $\frac{1}{30}$

$$\lim_{x\to2}\frac{x-2}{\{f(x)\}^2-9}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{f(x)-3}\times\frac{1}{f(x)+3}$$
$$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$$

20. 삼차함수 $f(x)$가 다음 두 식을 만족시킨다. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2} = 3$, $f(3)=5$

이때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

$f(x)=(x-2)^2(ax+b)$ 라 하면

$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(ax+b)}{(x-2)^2} = 3$, $2a+b=3$

$f(3)=3a+b=5$

$a=2$, $b=-1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2(2x-1)$

$f'(x)=2(x-2)(2x-1)+2(x-2)^2$

$\therefore f'(3)=10+2=12$

21. $\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}+3}{1+\frac{5}{x}} = 4$$

22. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}-x}$의 값은?

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

$x=-t$라 하면

$\lim_{t \to \infty} \frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t}+t} = -\frac{1}{2}$

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$의 값은?

① $-1$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $0$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $1$

$\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$

24. $\lim_{x \to -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x+11}-3}$의 값을 구하시오.

$\lim_{x \to -2} \frac{2(x+2)}{x+2} \times (\sqrt{x+11}+3)$

$=12$

25. 두 상수 $a,b$에 대하여 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-2}{x-2}=b$일 때, $10a+4b$의 값을 구하시오.

$\sqrt{2+a}-2=0,\ a=2$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-2}\times\frac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ b=\frac{1}{4}\quad\therefore\ 10a+4b=21$

26. $\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+1)}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+8}+3}{1}$$

$=12$

27. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $P(t,t^3)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=a$일 때, $30a$의 값을 구하시오.

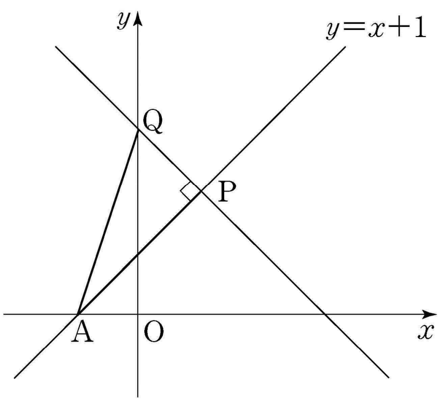
$y-t^3=3t^2(x-t)$

$3t^2x-y-2t^3$

$f(t)=\frac{|2t^3|}{\sqrt{9t^4+1}}$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\frac{2}{3},\ 30a=20$

28. 그림과 같이 직선 $y=x+1$위에 두 점 $A(-1,0)$과 $P(t,t+1)$이 있다. 점 $P$를 지나고 직선 $y=x+1$에 수직인 직선이 $y$축과 만나는 점을 $Q$라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}$의 값은?

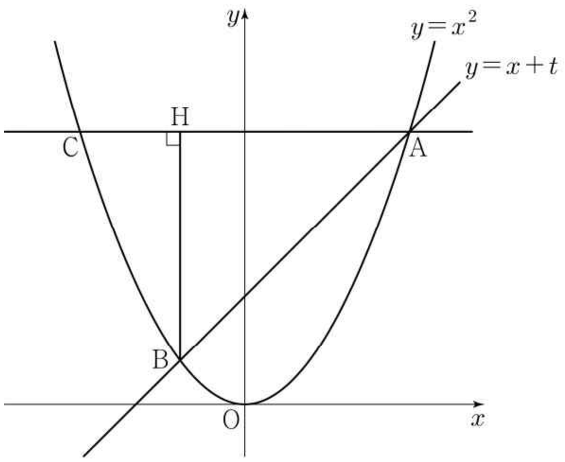



① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$y=-x+2t+1$ 이므로 $Q(0,2t+1)$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{1^2+(2t+1)^2}{2(t+1)^2}=2$

29. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 $A$, $B$라 하자. 점 $A$를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 $A$가 아닌 점을 $C$, 점 $B$에서 선분 $AC$에 내린 수선의 발을 $H$라 하자. $\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}$의 값을 구하시오. (단, 점 $A$의 $x$좌표는 양수이다.)




점 $B$의 $x$좌표를 $\alpha$, 점 $A$의 $x$좌표를 $\beta$

$\overline{AH}=\beta-\alpha$, $\overline{CH}=\alpha+\beta$

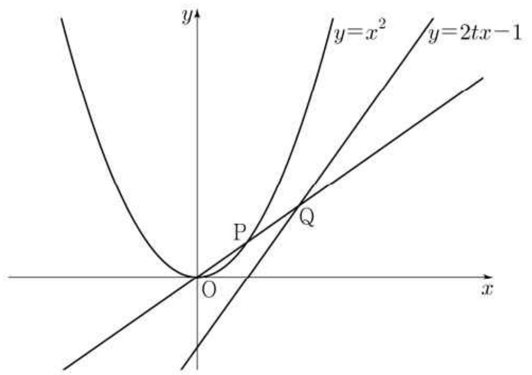
$\overline{AH}-\overline{CH}=-2\alpha$

$$\alpha=\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{AH}-\overline{CH}}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4t}{t}\times\frac{1}{\sqrt{1+4t}+1}=2$$

30. 그림과 같이 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과 거리가 최소인 점을 $P$라 하고, 직선 $OP$가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 $Q$라 할 때, $\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, $O$는 원점이다.)




① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ $3$ ⑤ $\sqrt{10}$

$P(\alpha,\ \alpha^2)$

$2\alpha=2t,\ \alpha=t$

$P(t,\ t^2)$

$l\ :\ y=tx,\ Q\left(\frac{1}{t},1\right)$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{1-t}=2\sqrt{2}$$

31. 실수 $t$에 대하여 직선 $y=t$가 함수 $y=\left|x^2-1\right|$의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 1-} f(t)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

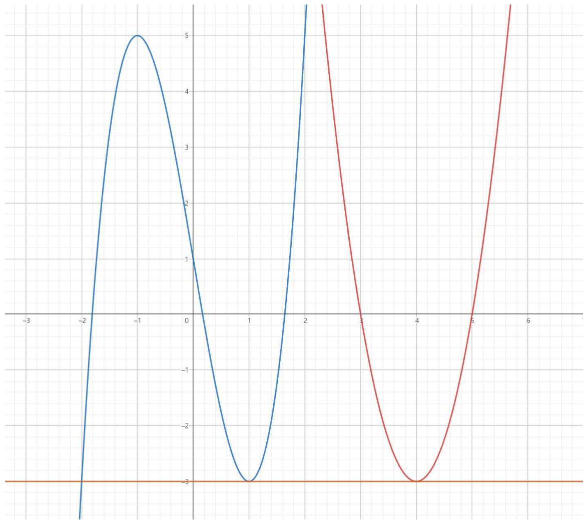
$\lim_{t \to 1-} f(t)=4$

32. 두 자연수 $a, b$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x \le 2) \\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 $t$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(k)+\lim_{t \to k-} g(t)+\lim_{t \to k+} g(t)=9$를 만족시키는 실수 $k$의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 $a, b$의 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값은?

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55



방정식 $a(x-2)(x-b)+9=-3$이 중근을 가질 때, 문제의 조건에 맞으므로

자연수 $a, b$는

$a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)=-12,$ 을 만족

$a(b-2)^2=48$

시키면 된다.

$(a, b)$의 순서쌍 중에서 $a+b$의 값이 최대가 되는 경우는 $a=48, b=3$일 때 이다.

33. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\frac{3}{5}$ 을 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 할 때, $|\alpha-\beta|$의 값은? (단, $a$는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이)

$f(a)\neq 0$이라 하면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=1$ 이므로

$f(a)=0$

방정식 $f(x)=0$의 두 근이 $\alpha, \beta$ 이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\therefore a=\alpha$ 또는 $a=\beta$

$a=\alpha$ 라 하면

$\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\alpha)}$

$=\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta+1}=\frac{3}{5}$, $\therefore \alpha-\beta=4$

$a=\beta$ 라 하면

$\lim_{x\to\beta}\frac{(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)}$

$=\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\alpha+1}=\frac{3}{5}$, $\therefore \beta-\alpha=4$

$\therefore |\alpha-\beta|=4$

34. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수 $a$, $b$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시 오 .

| |
|---|
| 모든 실수 $\alpha$에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다. |

모든 실수 $\alpha$에 대하여 $\lim_{x\to\alpha}\frac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로 $f(\alpha)=0$ 이면

$f(2\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 2\alpha+1$이면

$f(\alpha)=f(2\alpha+1)=f(4\alpha+3)=\cdot\cdot\cdot=0$

이므로

문제의 조건에 맞지 않다.

$\alpha=2\alpha+1$, $\alpha=-1$

$f(-1)=0$,

$f(x)=(x+1)(x^2+(a-1)x+4)$

$b=a+3$

$D=(a-1)^2-16<0$

$-3<a<5$

$f(1)=a+b+5=16$

35. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x), g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $g(1)=0$ |
| (나) $\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{g(x)}=(n-1)(n-2)$ |
| $(n=1,2,3,4)$ |

$g(5)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$g(1)=0$ 이므로 $g(x)=(x-1)g_1(x)$

$$\lim_{x\to n}\frac{f(x)}{(x-1)g_1(x)}=(n-1)(n-2)$$

1) $n=1$ 일 때,

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)g_1(x)}=0$ 이므로

$f(x)=(x-1)f_1(x)$

$\lim_{x\to 1}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=0$ 이므로 $f_1(1)=0$

2) $n=2$ 일 때,

$\lim_{x\to 2}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}=0$ 이므로 $f_1(2)=0$

$\therefore f_1(x)=(x-1)(x-2)$

3) $n=3$ or $4$일 때,

$\lim_{x\to n}\frac{(x-1)(x-2)}{g_1(x)}=\frac{(n-1)(n-2)}{g_1(n)}$

$=(n-1)(n-2)$ 이므로

$g_1(3)=g_1(4)=1$

$\therefore g_1(x)=(x-3)(x-4)+1$

$\therefore g(x)=(x-1)\{(x-3)(x-4)+1\}$

$\therefore g(5)=4\times(2+1)=12$

## 출제 예상 문제

36. 두 상수 $a, b$에 대하여

$\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{2}{x+1}-a\right)=b$일 때,

$a+b$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

$a=\frac{2}{3},\ b=-\frac{2}{9}$

$a+b=\frac{4}{9}$

37. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2-1}+3x}{2x-3}$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{25x^2-1}+3x}{2x-3}=4$

38. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{|f(x)|-|f(1)|}{|x-1|}=f(1)+2$

(나) $f(2)=2$

$f(1)=0$

$\lim_{x\to1}\frac{|(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)|}{|x-1|}=2,$

$f(x)=(x-1)^3-(x-1)^2+2(x-1)$

$f(x)=(x-1)^3+3(x-1)^2-2(x-1)$

$f(1)\neq 0$

$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$f'(1)=0,\ f(1)=-2$

$f(x)=(x-1)^2(x+2)-2$

$f(3)=8$ or $16$ or $18$

18

39. 사차함수 $f(x)$가

$$\sum_{k=1}^{4}\lim_{x\to1}\frac{f(kx)}{x-1}=32$$를 만족시킬 때,

$f(5)$의 값을 구하시오.

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$

$f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=a(-1)(-2)(-3)=-6a$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(2x)}{x-1}=2a(1)(-1)(-2)=4a$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(3x)}{x-1}=3a(2)(1)(-1)=-6a$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(4x)}{x-1}=4a(3)(2)(1)=24a$$

$16a=32$

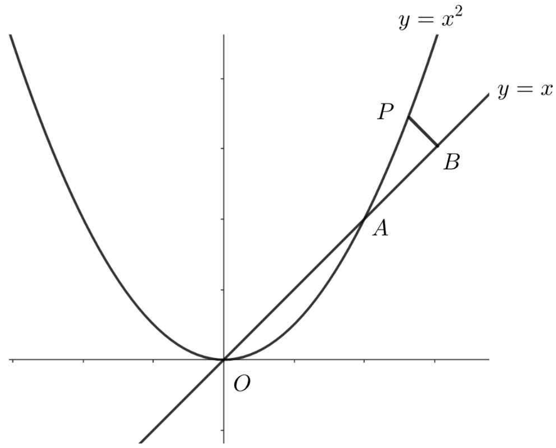
$a=2$

$f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

$f(5)=48$

40. 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 $A$라 하자. 곡선 $y=x^2$ 위의 $A$가 아닌 점을 $P(t,\ t^2)$이라 할 때, 점 $P$에서 $y=x$에 내린 수선의 발을 $B$라 하자. $\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$




$A(1,\ 1),\ P(t,\ t^2),\ B\left(\frac{t^2+t}{2},\ \frac{t^2+t}{2}\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+t}{2}-1\right|$,

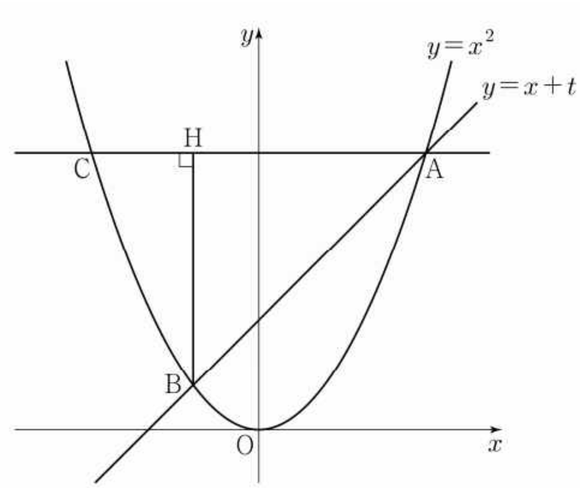
$\overline{PB}=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+t}{2}-t\right|$

$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\lim_{t\to1}\frac{|t^2-t|}{|t^2+t-2|}=\frac{1}{3}$$

41. 실수 $t(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 $A$, $B$라 하자. 점 $A$를 지나고 $x$축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 $A$가 아닌 점을 $C$, 점 $B$에서 선분 $AC$에 내린 수선의 발을 $H$라 하자.

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}-\sqrt{2}\times\overline{CH}}{t}$의 값은?(단, 점 $A$의 $x$좌표는 양수이다.)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4




점 $B$의 $x$좌표를 $\alpha$, 점 $A$의 $x$좌표를 $\beta$라 하면

점 $C$의 $x$좌표는 $-\beta$

$\overline{AB}=\sqrt{2}(\beta-\alpha)$, $\overline{CH}=\alpha+\beta$

$\overline{AB}-\sqrt{2}\times\overline{CH}=-2\alpha\sqrt{2}$

$\alpha=\frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$

$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{AB}-\sqrt{2}\times\overline{CH}}{t}=\sqrt{2}\times\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

$=\sqrt{2}\times\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t}\times\frac{1}{\sqrt{1+4t}+1}=2\sqrt{2}$

42. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 2인 모든 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(3)$의 최댓값을 구하시오.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^5}=0$, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=3$ |
| (나) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}=4$ |

$f(x)=2x^3+2x^2+3x$ or $2x^2+3x$

$f(3)$의 최댓값은 81

43. 함수 $f(x)=x^3-12x^2+4x$에 대하여 $\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}$의 값을 구하시오.

$\lim_{x\to0}\frac{f(2x)}{x}=8$

44. 이차 이상의 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\{g(x)+x^4\}f'(x)=\{f(x)\}^2$이 항상 성립하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(-2)$의 값은?

| |
|---|
| (가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $f(2)=0$ |
| (나) $\lim_{x\to\infty}\frac{\lvert g(x)\rvert}{x^n}=1$인 4이하의 자연수 $n$이 존재한다. |

① $-48$ ② $-50$ ③ $-52$
④ $-54$ ⑤ $-56$

$n \leq 3$ 이고 $f(x)$가 $m$차 다항식이라 하면 좌변은 $4+(m-1)$차 식이고, 우변은 $2m$차 식

$m=3$일 때 좌변의 최고차항의 계수는 $m$이고
우변의 최고차항의 계수는 1이므로 등식은 성립하지 않는다. $\therefore n=4$

우변의 최고차항의 계수가 1이므로
$g(x)=-x^4+h(x)$이고 $h(x)$는 삼차함수이다.

$f(x)$가 $m$차 다항식이라 하면
좌변은 $3+(m-1)$차 식이고, 우변은 $2m$차 식
$\therefore m=2$
$f(2)=0$이므로 $f(x)=(x-2)(x-\alpha)$이고

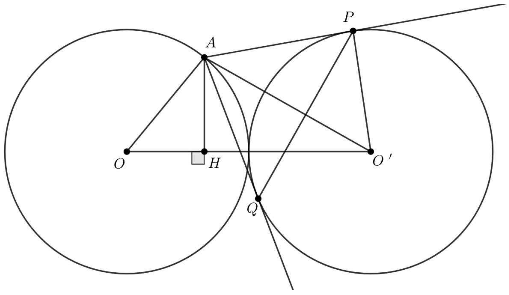
$h(x)\{(x-2)+(x-\alpha)\}=\{(x-2)(x-\alpha)\}^2$

$\frac{\alpha+2}{2}=2 \text{ or } \alpha \quad \therefore \alpha=2$

$\therefore h(x)=\frac{1}{2}(x-2)^3$

$g(x)=-x^4+\frac{1}{2}(x-2)^3$
$g(-2)=-48$

45. 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 1인 두 원 $O, O'$이 외접하고 있다. 원 $O$ 위의 점 $A$에서 원 $O'$에 그은 두 접선의 접점을 각각 $P, Q$라 하고 점 $A$에서 선분 $OO'$에 내린 수선의 발을 $H$라 하자. $\overline{OH}=x$라 할 때, $\lim_{x\to 1-}\frac{\overline{PQ}^2}{1-x}$의 값을 구하시오.




$\overline{AH}=\sqrt{1-x^2}$, $\overline{HO'}=2-x$

$\overline{AO'}=\sqrt{1-x^2+(2-x)^2}=\sqrt{5-4x}$

$\overline{AP}=\sqrt{5-4x-1}=\sqrt{4-4x}$

$\frac{1}{2}\times\overline{AP}\times\overline{PO'}=\frac{1}{2}\times\overline{AO'}\times\frac{1}{2}\overline{PQ}$

$\overline{PQ}=2\frac{\sqrt{4-4x}}{\sqrt{5-4x}}$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{\overline{PQ}^2}{1-x}=\lim_{x\to 1-}\frac{4\times\frac{4-4x}{5-4x}}{1-x}=16$$

46. 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-x^2\}}{f(x)+x^2}=2$을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

$f(x)$가 삼차 이상의 다항식이면 극한값이 존재하지 않는다.

$f(x)$가 일차함수이면 극한값은 존재하지 않는다.

$f(x)$의 이차항의 계수가 1이 아니면 분자는 사차식이므로 극한값이 존재하지 않는다.

$f(x)=x^2+ax+b$라 하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+ax+b)(ax+b)}{2x^2+ax+b}=2$$

$a=0,\ b=4$

$f(x)=x^2+4$

$f(5)=29$

47. 다항함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x^3}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}=7$ |
| (나) 방정식 $h(x)=3x$의 실근은 0, 2뿐이다. |

다항식 $h(x)$를 이차항의 계수가 1인 서로 다른 두 이차함수 $f(x), g(x)$로 나눈 나머지는 모두 $2x+2$일 때, $f(5)$의 최댓값을 구하시오.

$h(x)=x^3+ax^2+7x$

$x(x^2+ax+4)=0,\ a=-4$

$h(x)=x^3-4x^2+7x$
$=f(x)Q_1(x)+2x+2$
$=g(x)Q_2(x)+2x+2$

$x^3-4x^2+7x-(2x+2)$
$=f(x)Q_1(x)=g(x)Q_2(x)$
$=(x-1)^2(x-2)$

$f(x)=(x-1)^2$ or $(x-1)(x-2)$

$f(5)$의 최댓값은 16

48. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x^3-2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)+2}{x^3+x}=7,$$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=-1$를 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오.

$$\lim_{x\to 0+}\frac{(x^3-2x^2)f\left(\frac{1}{x}\right)+2}{x^3+x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{t^3}-\frac{2}{t^2}\right)f(t)+2}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-2t)f(t)+2t^3}{1+t^2}$$

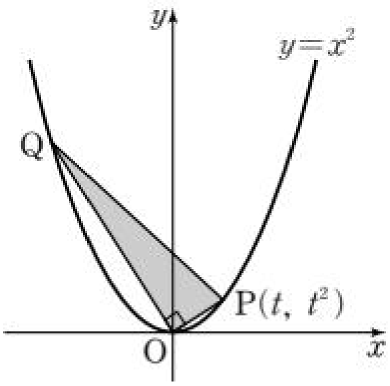
$f(t)=t^2+at+b$라 하면

$$\lim_{t\to\infty}\frac{(1-2t)(t^2+at+b)+2t^3}{1+t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(1-2a)t^2+(a-2b)t+b}{1+t^2}$$
$=1-2a=7,\ a=-3$

$f(x)=x^2-3x+2$

$f(5)=12$

49. 그림과 같이 실수 $t(0<t)$에 대하여 곡선 $y=x^2$위의 한 점을 $P(t, t^2)$라 할 때, 원점 $O$를 지나고 직선 $OP$와 수직인 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 $Q$라 하자. 삼각형 $OPQ$의 넓이를 $S(t)$, 곡선 $y=x^2$과 직선 $PQ$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $A(t)$라 할 때, $30\lim_{t\to 0+}\frac{t^2A(t)}{S(t)}$의 값을 구하시오.




직선 $OP$의 기울기가 $t$이므로 직선 $OQ$의 방정식은 $y=-\frac{1}{t}x$이다.

$x^2=-\frac{1}{t}x,\ x=-\frac{1}{t}$

$Q\left(-\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}\right)$

$S(t)=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+2+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$

$A(t)=\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{t}\right)^3$

$$30\lim_{t\to 0+}\frac{t^2A(t)}{S(t)}=30\lim_{t\to 0+}\frac{t^2\times\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{t}\right)^3}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}$$

$=10\lim_{t\to 0+}t^2\times\left(t+\frac{1}{t}\right)^2$

$=10\lim_{t\to 0+}(t^2+1)^2=10$

50. 자연수 $n$에 대하여 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$를 $(x-1)^n$으로 나눈 몫과 나머지가 모두 함수 $g(x)$라 할 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^4}=n+\{f(1)\}^4$$을

만족시킨다. $f(2)$의 값을 구하시오.

$f(x)=g(x)\{(x-1)^n+1\}$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)^n}{(x-1)^4}$$

$n+\{f(1)\}^4>0$이므로 $n\le4$

$n=4$라 하면

$g(1)=4+\{f(1)\}^4$ 이고

$f(1)=g(1)$ 을 만족시키는 실수

$g(1)=4+\{g(1)\}^4$

$g(1)$은 존재하지 않는다.

$n=3$이면

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)^n}{(x-1)^4}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)^3}{(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{(x-1)}$$

이고 $g(1)=f(1)=0$ 이고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 이차이하의 다항식이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)(x-1)^3}{(x-1)^4}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+b)}{(x-1)}=3,\ b=2$$

$g(x)=(x-1)(x+2)$

$f(x)=(x-1)(x+2)\{(x-1)^3+1\}$

$f(2)=8$

$n=2$ 이면 $g(x)$는 일차이하의 다항식이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.