지수

2025 기출 문제

1. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$의 값을 구하시오.

$\left(5^{1-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5}$

2. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[8]{4}}$의 값을 구하시오.

$2^{\frac{5}{4}-\frac{2}{8}}=2$

3. $\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}$의 값을 구하시오.

$5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=5^1=5$

2024 기출 문제

4. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$의 값을 구하시오.

$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

5. $3^{1-\sqrt{5}}\times 3^{1+\sqrt{5}}$의 값을 구하시오.

$3^{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}=3^2=9$

6. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오.

$(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=6$

2023 기출 문제

7. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$의 값을 구하시오.

$2^2 \times 2^{-2} = 1$

8. $\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값을 구하시오.

$\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1} = 2^2 = 4$

9. 함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$\sqrt{3^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

$3^{\frac{f(n)}{8}} \times \left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right) = -9$

$3^{\frac{f(n)}{8}} = 3,\ f(n) = 8$

$f(1) = f(3) = 8$

$k - 1 = 8,\ k = 9$

10. $\left(\frac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값을 구하시오.

$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}} = 2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$
$= 2^2 = 4$

11. 자연수 $m(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값을 구하시오.

m^{12}의 n제곱근을 x라 하면 $x^n = m^{12}$

$x = m^{\frac{12}{n}}$

$m = 2, 3, 5, 6, 7$일 때, $m^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 5

$m = 4$, $4^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$m = 8$, $8^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 8

$m = 9$, $9^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$\sum_{m=2}^{9} f(m) = 5 \times 5 + 7 \times 2 + 8 = 47$

2022 기출 문제

12. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값을 구하시오.

$2^2 = 4$

13. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

(가) x에 대한 방정식 $(x^n - 64)f(x) = 0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
(나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

n은 짝수이고 $x = \pm 2^{\frac{6}{n}}$

$f(x) = \left(x - 2^{\frac{6}{n}}\right)\left(x + 2^{\frac{6}{n}}\right)$

$f(0) = -2^{\frac{12}{n}}$

$n = 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \text{ or } 12$

24

14. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$의 값을 구하시오.

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{9}$

15. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$의 값을 구하시오.

$\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = \frac{1}{2}$

로그

2025 기출 문제

16. $a>2$인 상수 a에 대하여 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합과 곱이 각각 4, k일 때, $a+k$의 값을 구하시오.

$\log_2 a+\dfrac{3}{\log_2 a}=4$, $a>2$,
$\log_2 a=3$, $a=8$

$k=\log_2 a\times\dfrac{3}{\log_2 a}=3$

$a+k=11$

17. 두 실수 $a=2\log\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$, $b=\log 2$에 대하여 $a\times b$의 값을 구하시오.

$\left(2\log\dfrac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20\right)\times\log 2$
$=(-1+\log_2 20)\times\log 2$
$=\log_2 10\times\log 2=1$

2024 기출 문제

18. 두 실수 a, b가 $3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$를 만족시킬 때, $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}$의 값은?

① $\dfrac{5}{12}$ ② $\dfrac{5}{6}$ ③ $\dfrac{5}{4}$ ④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{25}{12}$

$\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}=\dfrac{3a+2b}{6ab}=\dfrac{\log_3 32}{6\log_9 2}$
$=\dfrac{1}{3}\log_2 32=\dfrac{5}{3}$

19. 수직선 위의 두 점 $P(\log_5 3)$, $Q(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값을 구하시오. (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.)

$\dfrac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)}=1$

$2m\log_5 2=1-\log_5 3=\log_5\dfrac{5}{3}$

$2^{2m}=\dfrac{5}{3}=4^m$

2023 기출 문제

20. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$(단, k는 정수)

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)=8^{\frac{k}{2}}$에서

$n+4$를 3×2^{p} 이라하면 $2^{-p-2}=2^{\frac{3}{2}k}$

$k=\frac{2(-p-2)}{3}$이고 k는 정수이므로

$-p-2=3q,\ p=-3q-2$(단, q는 정수)

$n=3\times2^{-3q-2}-4$

n은 1000이하의 자연수이므로 q는 음의 정수이고 다음과 같다.

$n=3\times2-4,\ 3\times2^{4}-4,\ 3\times2^{7}-4$

426

2022 기출 문제

21. $\log_{4}\frac{2}{3}+\log_{4}24$의 값을 구하시오.

$\log_{4}\frac{2}{3}\times24=2$

22. $\log_{2}100-2\log_{2}5$의 값을 구하시오.

$\log_{2}\frac{100}{25}=2$

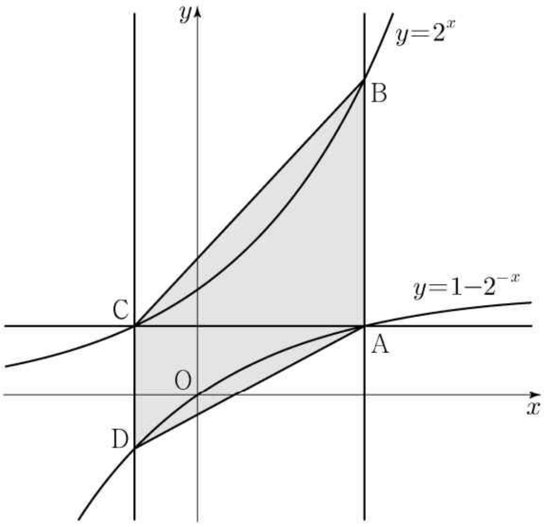
23. $\log_{2}120-\frac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오.

$\log_{2}120\times\frac{1}{15}=3$

지수함수

2025 기출 문제

24. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제 1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^{x}$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는?



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$　② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$

③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$　④ $4\log_2 3-2$

⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

$C(\log_2 k,\ k),\ A(-\log_2(1-k),\ k)$

$D\left(\log_2 k,\ 1-\frac{1}{k}\right),\ B\left(-\log_2(1-k),\ \frac{1}{1-k}\right)$

$\frac{1}{1-k}-k=2\left(k-1+\frac{1}{k}\right)$

$\frac{1-k+k^2}{1-k}=2\times\frac{k^2-k+1}{k},$

$k=2(1-k),\ k=\frac{2}{3}$

$C\left(\log_2\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ A\left(\log_2 3,\ \frac{2}{3}\right)$

$D\left(\log_2\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$

$\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\left(\log_2 3-\log_2\frac{2}{3}\right)$

$=\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}\times\left(\log_2\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

25. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 A_nB_n의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{A_nB_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$
④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

$A_1(\alpha,\ 2^\alpha)$, $B_1(\alpha+1,\ 2^{\alpha+1})$
$2^{\alpha+1}-2^\alpha=3$, $\alpha=\log_2 3$
$x_1=2^{\alpha+1}=6$

$A_2(\alpha,\ 2^\alpha)$, $B_2(\alpha+2,\ 2^{\alpha+2})$
$2^{\alpha+2}-2^\alpha=6$, $\alpha=1$
$x_2=2^{\alpha+2}=8$

$A_3(\alpha,\ 2^\alpha)$, $B_3(\alpha+3,\ 2^{\alpha+3})$
$2^{\alpha+3}-2^\alpha=9$, $\alpha=\log_2\frac{9}{7}$
$x_3=2^{\alpha+3}=\frac{72}{7}$

$x_1+x_2+x_3=\frac{170}{7}$

26. 곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표를 k라 하자. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)$의 값을 구하시오.

$x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이고 $f(f(x))=3x$이다.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}=k$, $k\times5^k=5^3$, $k^3\times5^{3k}=5^9$

$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right)$

$f(12)=\left(\frac{1}{5}\right)^9$, $f(f(12))=f\left(\frac{1}{5^9}\right)=36$

2024 기출 문제

27. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

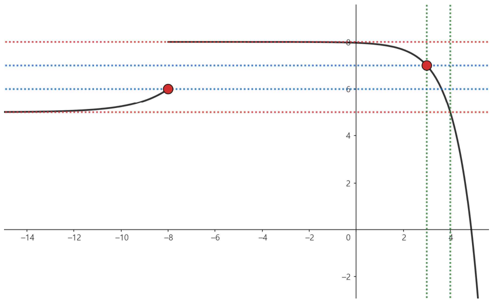
$x-6 \le -2x$

$x \le 2$

$1+2=3$

28. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x > -8) \end{cases}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.



$-3^{3-3}+8=7$, $-3^{4-3}+8=5$ 이므로

$2^{x+a}+b$의 점근선은 5이고

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

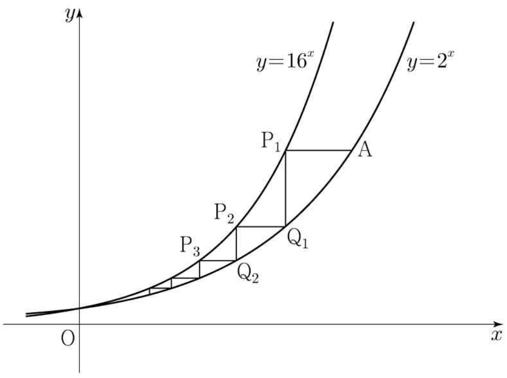
$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$a=8$

$a+b=13$

2023 기출 문제

29. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $A(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자. 점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자. 이와같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오.



$A(64,\ 2^{64})$, $P_1(16,\ 2^{64})$, $Q_1(16,\ 2^{16})$, $P_2(4,\ 2^{16})$

$Q_2(4,\ 2^4)$, $P_3(1,\ 2^4)$, $Q_3(1,\ 2)$, $P_4\left(\dfrac{1}{4},\ 2\right)$

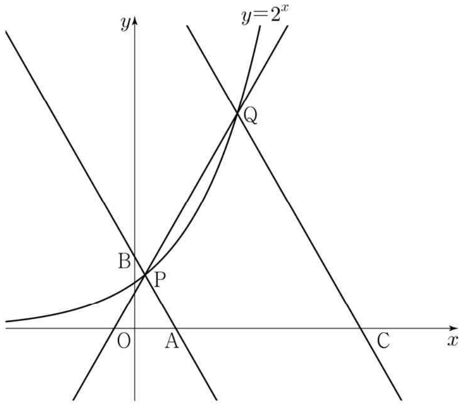
$x_n = 16 \times \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$x_5 = \dfrac{1}{16}$, $x_6 = \dfrac{1}{64}$

$\dfrac{1}{64} < \dfrac{1}{k} \le \dfrac{1}{16}$, $16 \le k < 64$

48

30. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $P(a,\ 2^a)$, $Q(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=4\overline{PB}$, $\overline{CQ}=3\overline{AB}$일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$)



$\overline{AB}=4\overline{PB}$이므로 점 A의 x좌표는 $4a$

삼각형의 닮음에 의해

$P(a,\ 2^a)$, $3\times\dfrac{4}{3}\times 2^a=2^{a+2}$ 이므로

$Q(a+2,\ 2^{a+2})$

$$m=\frac{2^{a+2}-2^a}{2}$$

$$-m=\frac{-2^a}{3a},\ \frac{2^{a+2}-2^a}{2}=\frac{2^a}{3a},$$

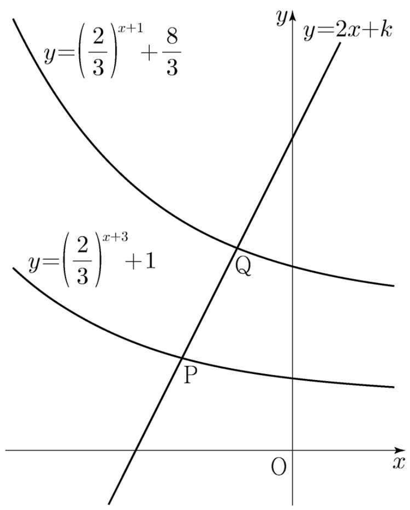
$$a=\frac{2}{9},\ b=\frac{20}{9}$$

2022 기출 문제

31. 직선 $y=2x+k$가 두 함수 $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+3}+1$, $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+\dfrac{8}{3}$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은?

① $\dfrac{31}{6}$ ② $\dfrac{16}{3}$ ③ $\dfrac{11}{2}$

④ $\dfrac{17}{3}$ ⑤ $\dfrac{35}{6}$



$$P\left(a,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1\right),\ Q\left(a+1,\ \left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1\right\}=2$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=\frac{1}{3},\ a=-2$$

$$P\left(-2,\ \frac{5}{3}\right),\ k=\frac{17}{3}$$

로그함수

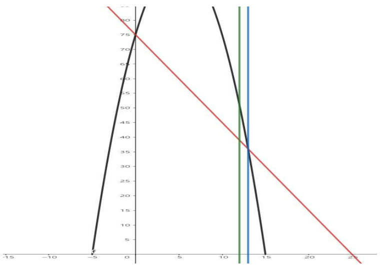
2025 기출 문제

32. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

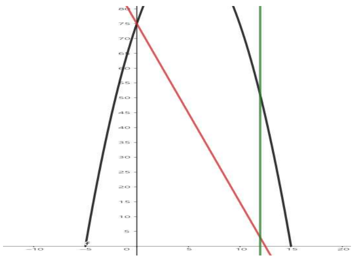
> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$-n^2+10n+75>75-kn$



$n=12,\ -n^2+10n+75>75-kn$
$n=13,\ -n^2+10n+75\le 75-kn$
$k=3$



$n=12,\ 75-kn>0$
$n=13,\ 75-kn\le 0$

$k=6$

$3+6=9$

33. 방정식 $\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)=3$ 를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>4$

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=27$

$x=7$

34. 방정식 $\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>3$

$(x-3)^2=3x-5$

$x^2-9x+14=0$

$x=7$

2024 기출 문제

35. 상수 $a(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값을 구하시오.

$x=a$

$\left|\log_2\frac{a}{4}-(-\log_2 a)\right|=4$

$\log_2\frac{a^2}{4}=4$, $\frac{a^2}{4}=16$, $a=8$

36. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>1$

$(x-1)^2=13+2x$

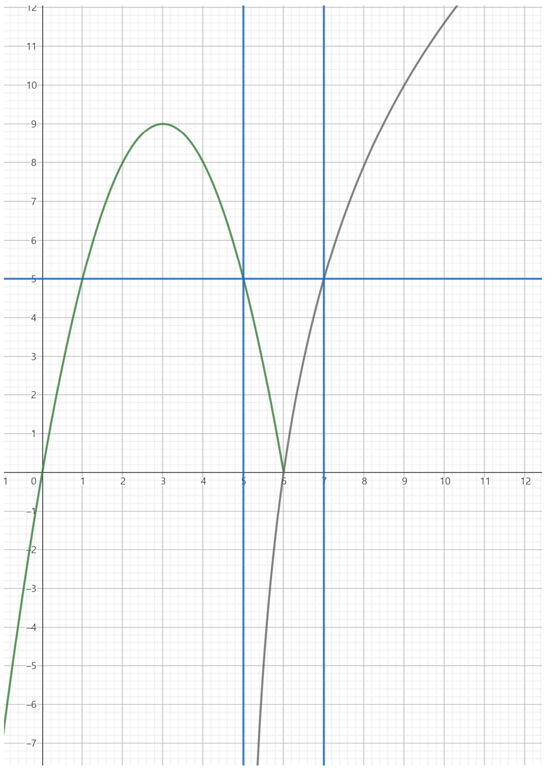
$x^2-4x-12=0$, $(x-6)(x+2)=0$

$x=6$

37. 양수 a에 대하여 $x\geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+6x & (-1\leq x<6)\\ a\log_4(x-5) & (x\geq 6)\end{cases}$$

이다. $t\geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[t-1, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오.



$a\log_4 2\geq 5$, $a\geq 10$

2023 기출 문제

38. 방정식 $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>2$

$x^2-4=32$, $x=6$

39. 방정식 $\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$x>2$

$3x+2=4(x-2)$

$x=10$

40. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오.

$4<x$

$x^2-8x+16=x+2$
$x^2-9x+14=0$

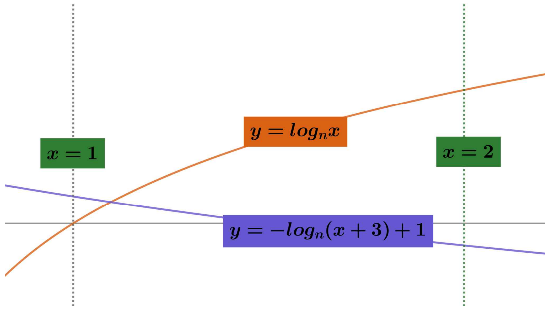
$x=7$

2022 기출 문제

41. $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선 $y=\log_n x$, $y=-\log_n(x+3)+1$이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

$-\log_n 4+1>0$, $-\log_n 5+1<\log_n 2$

$4<n<10$, $\dfrac{5(5+9)}{2}=35$



42. 두 상수 a, $b(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$을 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

$a : b = \log_2 a-\log_4 a : \log_2 b-\log_4 b$

$\log_4 a^b = \log_4 b^a$, $a^b=b^a=20$

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=800$

지수 로그함수 혼합 문제

2024 기출 문제

43. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. 〈보기〉의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$)

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

〈보기〉

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.

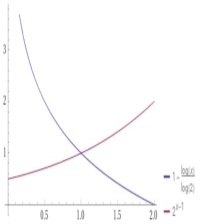
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.

ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

$t=1$ 이므로 ㄱ. 참

$y=1-\log_2 x$, $y=2^{x-1}$

$(1,\ 1)$, $(1,\ 1)$

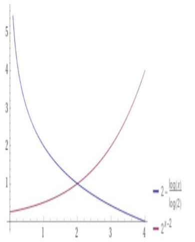


ㄴ.

$t=2$

$y=2-\log_2 x$, $y=2^{x-2}$

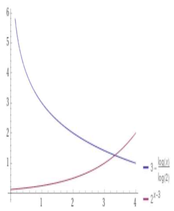
$(2,\ 1)$, $(2,\ 1)$



$t=3$

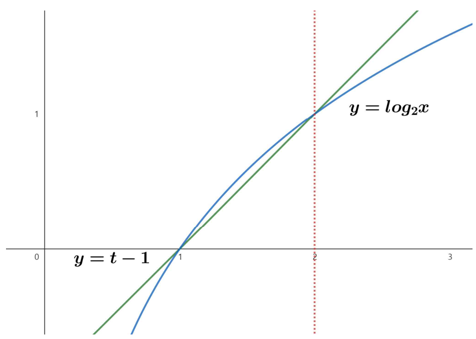
$y=3-\log_2 x$, $y=2^{x-3}$

$(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$



참

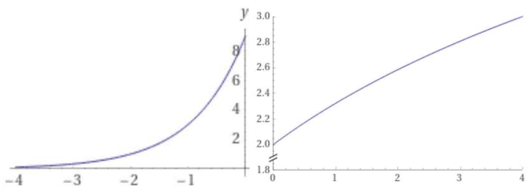
ㄷ. 이 참이라고 가정하면 모든 양의 실수 t에 대하여 $t-\log_2 t \geq 1$을 만족시켜야 한다.



이므로 거짓

2023 기출 문제

44. 자연수 n에 대하여 $f(x)$를 $f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x \geq 0) \end{cases}$ 이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

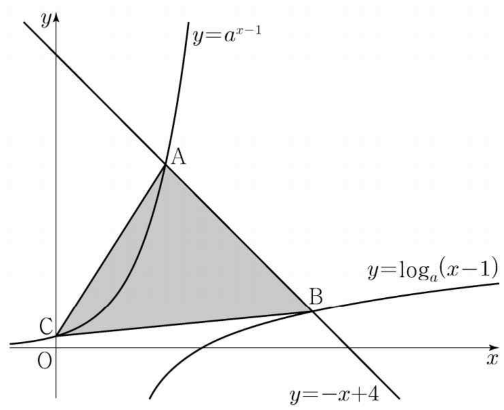


$2<n<9$일 때, $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 4가 되므로

$\dfrac{6(3+8)}{2}=33$

2022 기출 문제

45. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오.



$y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$은 $y=x-1$에 대하여 대칭이므로

두 점 A, B의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$이므로 $A\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$a^{\frac{1}{2}}=\dfrac{5}{2}$, $a=\dfrac{25}{4}$, $C\left(0, \dfrac{4}{25}\right)$, $h=\dfrac{\left|4-\dfrac{4}{25}\right|}{\sqrt{2}}$

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\dfrac{96}{25\sqrt{2}}=\dfrac{96}{25}$, $50S=192$

삼각함수

2025 기출 문제

46. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\sin\theta = -\frac{4}{5}$

47. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos(\pi + \theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin\theta + \cos\theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

48. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{5}$일 때, $\frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta}$의 값은?

① -5 ② $-\sqrt{5}$ ③ 0
④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta = -\frac{1}{5}$

$\frac{\sin\theta}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin\theta} = 5$

2024 기출 문제

49. $\cos\theta < 0$이고 $\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은?

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{7} = \tan\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

50. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\left(\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi\right)$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

51. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$인 θ에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$, $\tan\theta = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

2023 기출 문제

52. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은?

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$
④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

$1 - \frac{4}{9} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{9}$

53. $\sin(\pi - \theta) = \frac{5}{13}$이고 $\cos\theta < 0$일 때, $\tan\theta$의 값은?

① $-\frac{12}{13}$ ② $-\frac{5}{12}$ ③ 0
④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{12}{13}$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta = \frac{5}{13}$

$\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\tan\theta = -\frac{5}{12}$

54. $\tan\theta < 0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

2022 기출 문제

55. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=\frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0
④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

56. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

57. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\tan\theta=3$

$\sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}}$, $\cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$

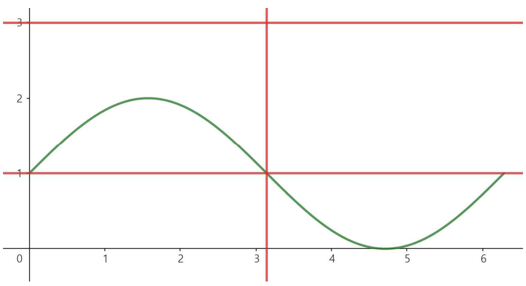
$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

삼각함수 그래프

2025 기출 문제

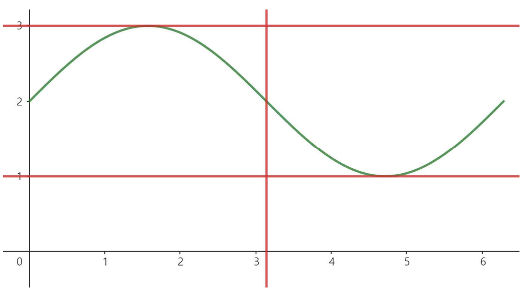
58. 5이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y = a\sin x + b$의 그래프가 직선 $x = \pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y = 1$, $y = 3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A \cup B \cup C) = 3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M \times m$의 값을 구하시오.

$a = 1, b = 1$

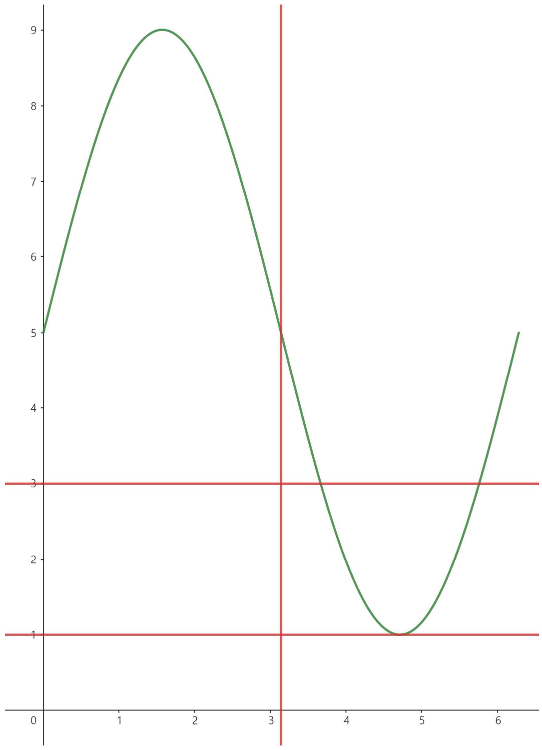


열린구간 $(0, 2\pi)$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

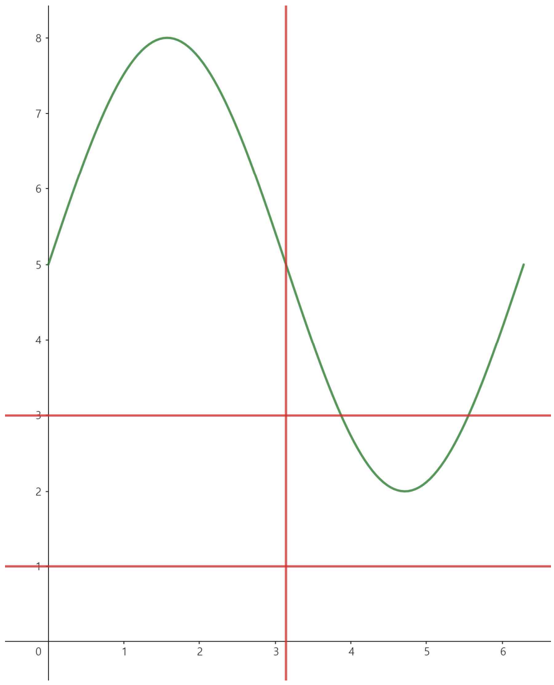
$a = 1, b = 2$



$a = 4, b = 5$



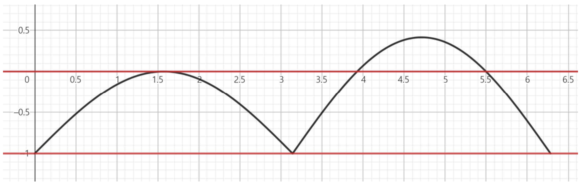
$a = 3, b = 5$



59. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\le t\le 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



$$0+\frac{\pi}{2}+\pi+2\times\frac{\pi+2\pi}{2}+2\pi=\frac{13}{2}\pi$$

15

60. 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

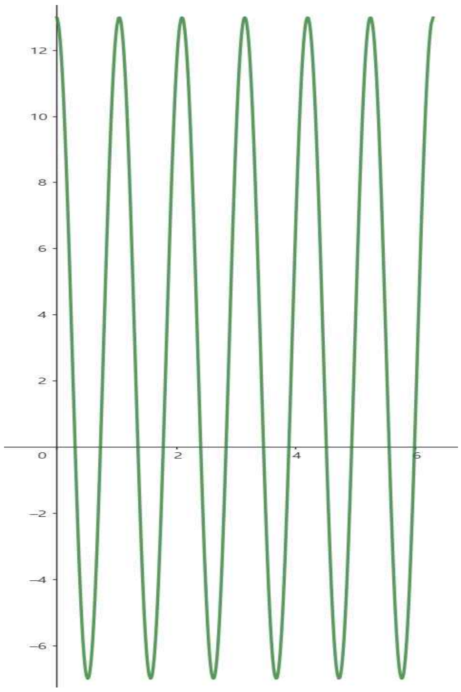
$f(x)=a\cos bx+3$이 $x=\frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 갖도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최솟값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$a\cos\frac{\pi}{3}b+3=13,\ a\cos\frac{\pi}{3}b=10$$

$$a=10,\ \frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{3},\ b=6$$

$$a+b=16$$



2024 기출 문제

61. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\sin bx+8-a$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

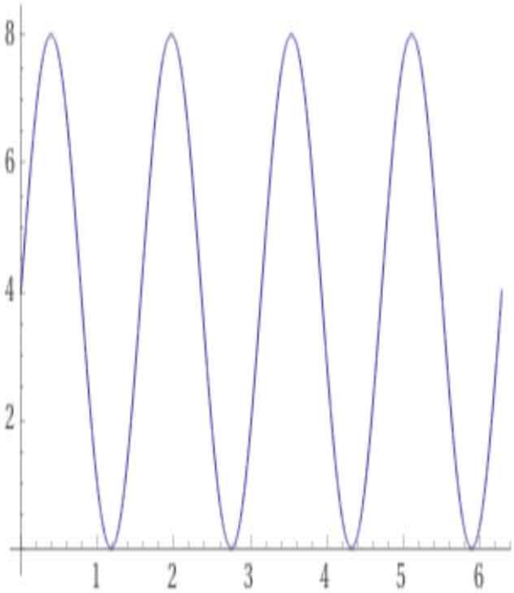
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$-a+8-a=0,\ a=4$

$f(x)=4\sin bx+4$

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2},\ b=4$

$a+b=8$



62. $0\leq x\leq 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\leq \sin\frac{\pi}{7}$를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha\leq x\leq\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$
④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$

$\sin\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{5}{14}\pi$

$\beta=2\pi-\alpha$

$\beta-\alpha=2\pi-2\alpha=\frac{9}{7}\pi$

63. 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0<x<16$에서 부등식 $f(2+x)f(2-x)<\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

$f(2+x)f(2-x)$
$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$-\frac{1}{2}<\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)<\frac{1}{2}$

$2+6+10+14=32$

2023 기출 문제

64. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x)=-\sin 2x$가 $x=a$에서 최댓값을 갖고 $x=b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는?

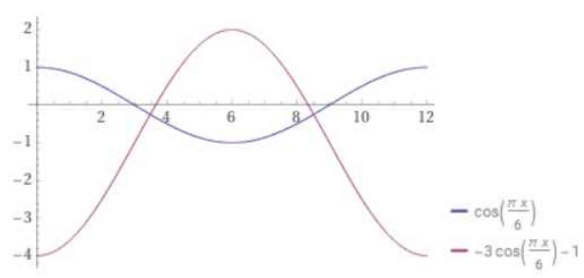
① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

$a=\frac{3\pi}{4}, \left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

$b=\frac{\pi}{4}, \left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

$\frac{2}{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{\pi}$

65. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$, $g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값을 구하시오. (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)



$\alpha_1=2, \alpha_2=10$

$k=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2\pi}{3}$ or $\frac{4\pi}{3}$

$|\beta_1-\beta_2|=4$

66. 함수 $f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $ab=\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이고 p, q는 서로소인 자연수이다.)

$\left[-\frac{\pi}{3}, 2b\right]$

$a-\sqrt{3}\tan 2b \le f(x) \le a+3$

$a=4,\ b=\frac{\pi}{12}$

2022 기출 문제

67. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

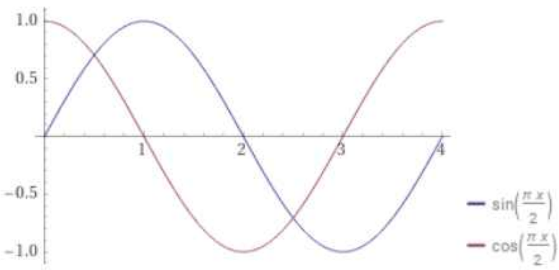
〈보기〉

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}$ $=\left\{t \mid 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}$이므로 참

ㄴ. $0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $\beta(t)-\alpha(t)=3,\ \beta(0)-\alpha(0)=3$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$ 라 하면

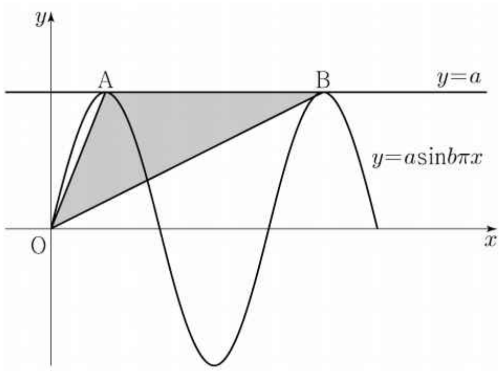
$\cos k=t_2,\ \sin k=t_1$ 이므

$\cos k-\sin k=\frac{1}{2}$

$1-2t_1 \times t_2=\frac{1}{4},\ t_1 \times t_2=\frac{3}{8}$

로 거짓

68. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0 \le x \le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



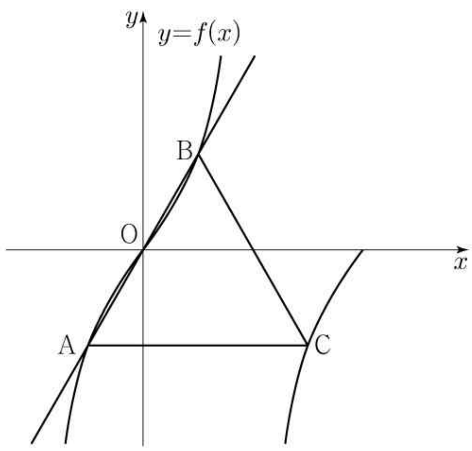
$A\left(\frac{1}{2b}, a\right), B\left(\frac{5}{2b}, a\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=5,\ 2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{5}{4}$

$b=\frac{1}{2},\ a=\frac{5}{2},\ a+b=3$

69. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \mid -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$



$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$ 이므로

삼각형 ABC의 한변의 길이는 a

$B\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\sqrt{3}\right),\ \frac{a}{4}\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{4}=1,\ a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

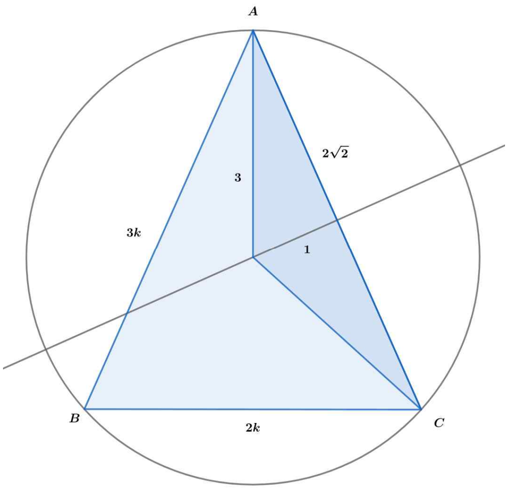
사인법칙과 코사인법칙

2025 기출 문제

70. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A = 2\sin B$
(나) $\cos B = \cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$
④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

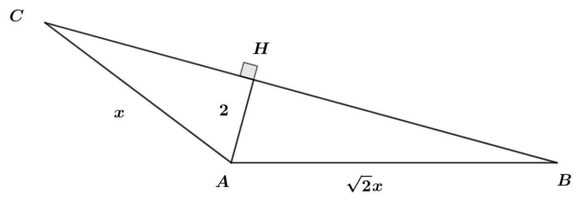


$k = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\frac{1}{2} \times 2k \times 2\sqrt{2}k = \frac{64\sqrt{2}}{9}$

71. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. $\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1$, $\overline{AH} = 2$이고 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



$R = 5\sqrt{2}$

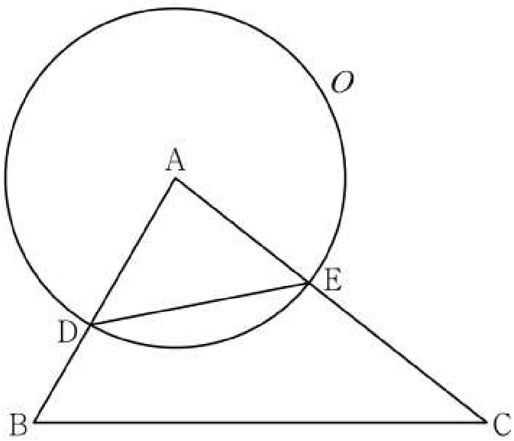
$\frac{x}{\sin B} = 2R = 10\sqrt{2}$

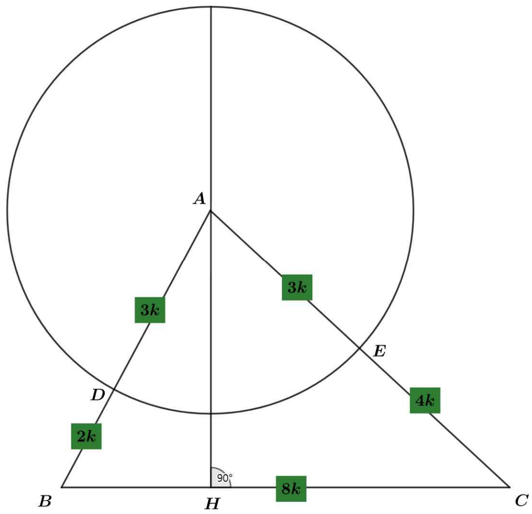
$\sin B = \frac{x}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}x}$, $x^2 = 20$

$\overline{BH}^2 = 2x^2 - 4 = 36$, $\overline{BH} = 6$

72. 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB위에 $\overline{AD}$: $\overline{DB}$ $=3$: 2인 점 D를 잡고, 점 A를 중심으로 하고 점 D를 지나는 원을 O, 원 O와 선분 AC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin A$: $\sin C=8$: 5이고, 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 9 : 35이다. 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7일 때, 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은? (단, $\overline{AB}<\overline{AC}$)

① $18+15\sqrt{3}$ ② $24+20\sqrt{3}$
③ $30+25\sqrt{3}$ ④ $36+30\sqrt{3}$
⑤ $42+35\sqrt{3}$





$$\cos B=\frac{25k^2+64k^2-49k^2}{2\times 5k\times 8k}=\frac{1}{2}$$

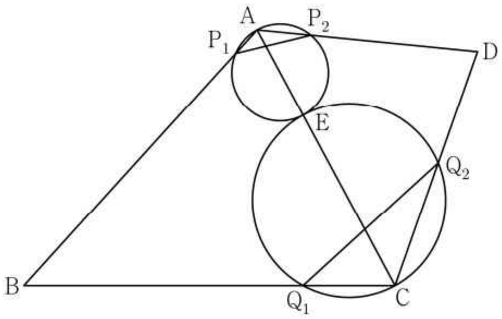
$$\frac{1}{2}\times(\overline{AH}+3k)\times 8k$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}+3\right)\times 8k^2$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{7k}{\sin B}=14,\ k=\sqrt{3}$$

$$=36+30\sqrt{3}$$

2024 기출 문제

73. 그림과 같이 $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$인 사각형 $ABCD$에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2 라 하자. $\overline{P_1P_2} : \overline{Q_1Q_2} = 3 : 5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB} > \overline{AD}$)



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $\sqrt{24}$ ⑤ 5

$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin(\angle BAD)}=2r_1$, $\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)}=2r_2$

$r_1 : r_2 = 1 : 2$

$\frac{\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BAD)}=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1P_2}}\times\frac{r_1}{r_2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}$

$\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin(\angle BAD)=\frac{4}{5}$

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AB}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$

$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AB}\times\sin(\angle BAD)=2$

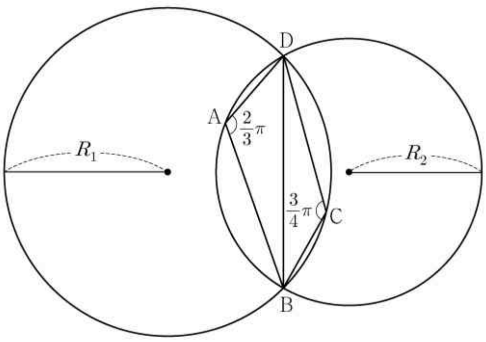
$\overline{AB}\times\overline{AB}=5$

$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=11$

$(\overline{AB}+\overline{CD})^2$
$=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{AB}=21$

$\overline{AB}+\overline{CD}=\sqrt{21}$

74. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$, $\angle BCD=\frac{3}{4}\pi$인 사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD 에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$R_2=\text{(가)}\times\overline{BD}$$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
>
> $$\overline{BD}^2=2^2+1^2-(\text{(나)})$$
>
> 이므로
>
> $$R_1\times R_2=\text{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오.

$$R_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\times\overline{BD}$$

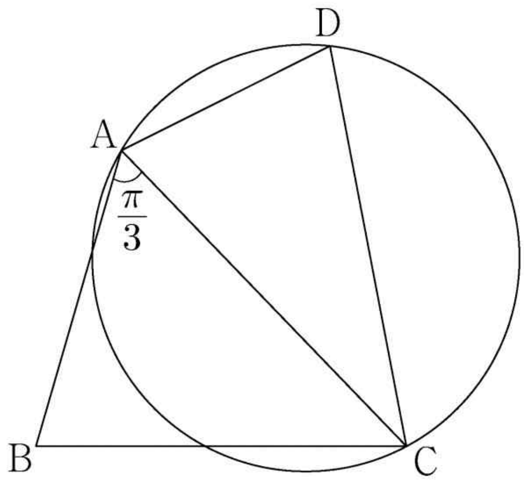
$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-\left(2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$R_1\times R_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{7}\times\frac{1}{\sqrt{3}}\times\sqrt{7}$$

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=-2,\ r=\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

$$9\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2=98$$

75. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$, $\overline{AD}\times\overline{CD}=9$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 사각형 $ABCD$가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자. $S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle ADC)}$의 값은?



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$
④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

$\overline{AC}=4$, $S_1=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$

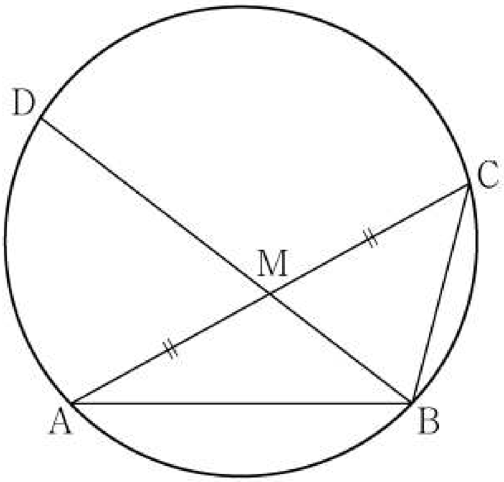
$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{4}{\sin(\angle ADC)}=2R$, $R=\frac{2}{\sin(\angle ADC)}$

$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{2}{\sin^2(\angle ADC)}=\frac{54}{25}$

2023 기출 문제

76. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\overline{AC}=x$

$4=x^2+9-6x\times\frac{7}{8}$, $x=4$

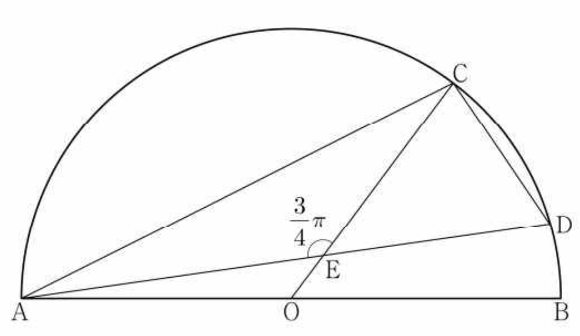
$\overline{AM}=\overline{MC}=2$

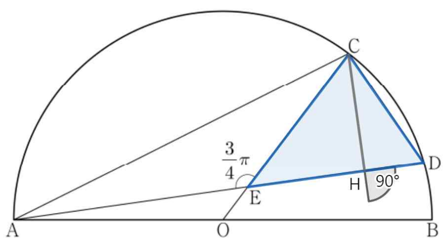
$\overline{BM}=\sqrt{4+9-12\times\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{BM}\times\overline{MD}$

$\therefore\ \overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

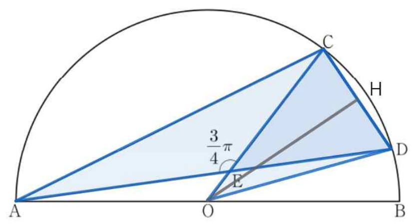
77. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고 $\overline{CE}=4$, $\overline{ED}=3\sqrt{2}$, $\angle CEA=\frac{3}{4}\pi$이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}=k\sqrt{2}$일 때, k의 값을 구하시오.





점 C에서 선분 ED에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH}=\overline{CH}=2\sqrt{2}$, $\overline{HD}=\sqrt{2}$, $\overline{CD}=\sqrt{10}$



$\angle CAD=\theta$라 하고
점 O에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H라 하면 원주각과 중심각의 성질에 의해 $\angle COD=2\theta$이고 삼각형 ODC는 이등변삼각형이므로 $\angle COH=\theta$, $\angle OCH=\frac{\pi}{2}-\theta$

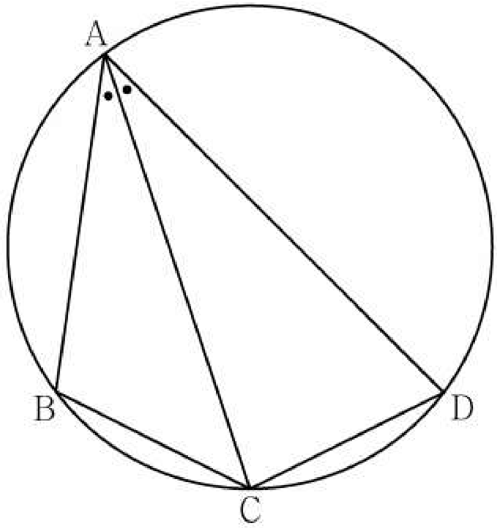
$$\frac{3\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}},$$

$$\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}},\ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{4}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi},\ \overline{AC}=4\sqrt{5}$$

$$\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$$

78. 그림과 같이 사각형 $ABCD$가 한 원에 내접하고 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$
④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$$\overline{BC}=\overline{CD}=x$$

$$\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)$$
$$=\frac{5^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\frac{7^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times7\times3\sqrt{5}}$$

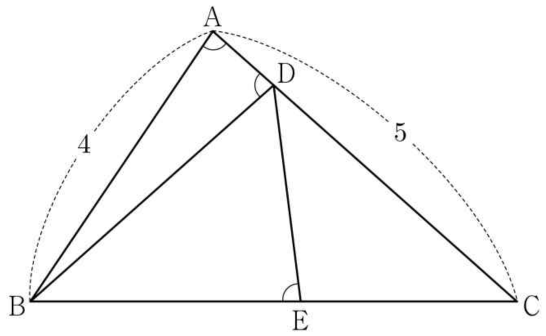
$$x=\sqrt{10},$$

$$\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{50}=2R,\ R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

2022 기출 문제

79. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC위의 점 E에 대하여 $\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$일 때, 선분 DE의 길이는?



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

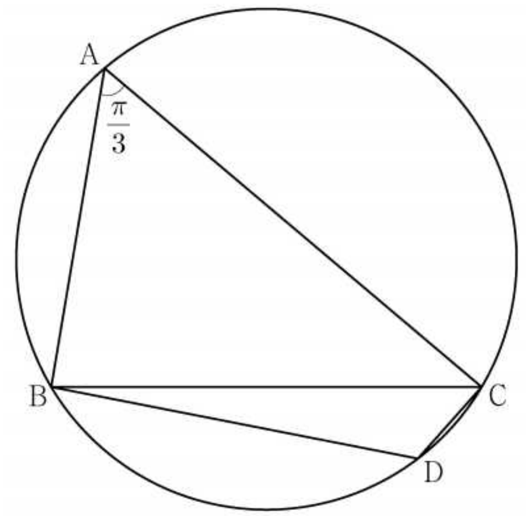
$\overline{AD}=1$, $\overline{BD}=\overline{CD}=4$

$\overline{BC}=\sqrt{16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{8}}=6$

$\overline{DE}^2-\left(\frac{1}{8}\overline{DE}\right)^2=4^2-3^2$

$\overline{DE}=\frac{8}{3}$

80. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값을 구하시오.



$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$, $\overline{BD}=8$

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{7}$, $\overline{BC}=2\sqrt{21}$

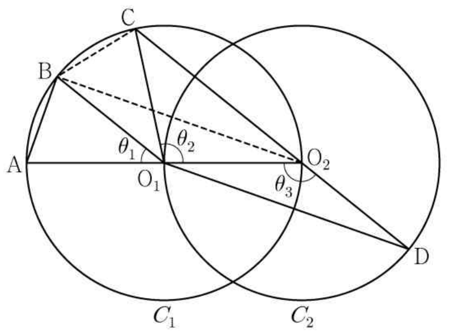
$\overline{CD}=x$

$(2\sqrt{21})^2=x^2+64-2\times8\times x\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$x=2$

$\overline{BD}+\overline{CD}=10$

81. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이 때, $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$ 이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\frac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

가 피타고라스 정리에 의해

$\overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=3k$

나 $\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

다

$k^2=8k^2+\overline{O_2C}^2-2\times2\sqrt{2}k\times\overline{O_2C}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{O_2C}=\frac{7}{3}k$

$f(p)\times g(p)=3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{7}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{56}{9}$

등차수열

2024 기출 문제

82. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은?

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$a_1=-4-d,\ a_2=-4,\ a_3=-4+d,$
$a_4=-4+2d,\ a_5=-4+3d$

$b_1=-8-d,\ b_2=-8+d,\ b_3=-8+3d$
$b_4=-8+5d,\ b_5=-8+7d$

$-4-d=-8+d,$
$-4+d=-8+3d,$
$-4+3d=-8+5d,\ \ d=2,\ a_{20}=32$

$-4-d=-8+3d,$
$-4+d=-8+5d,$
$-4+3d=-8+7d,\ \ d=1,\ a_{20}=14$

$a_{20}=32$ or 14

2023 기출 문제

83. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2a_5$, $a_8+a_{12}=-6$일 때, a_2의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$a_5=-4d,\ a_{10}=d=-3$

$a_2=-7d=21$

2022 기출 문제

84. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=6$, $a_4+a_6=36$일 때, a_{10}의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_5=18,\ a_2=6,\ d=4$

$a_{10}=38$

등차수열의 합

2024 기출 문제

85. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.

$a_7 = 13k$ (k는 자연수)

$\sum_{k=1}^{7} S_7 = 7a_1 + 6a_2 + 5a_3 + 4a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7$
$= 7(a_7 - 6d) + 6(a_7 - 5d) + \cdot\cdot\cdot + a_7$
$= 28a_7 - 112d = 644$

$k = \dfrac{644 + 112d}{28 \times 13} = \dfrac{23 + 4d}{13}$, $k = 3$, $d = 4$

$a_2 = a_7 - 5d = 39 - 20 = 19$

2023 기출 문제

86. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$이다.

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

$a_7 + a_8 + \cdot\cdot\cdot + a_{12}$
$= 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12}$

$a_7 + a_9 + a_{11} + a_2 + a_4 = 6 + |a_6|$

$5a_6 + 3 = |a_6|$, $a_6 = -\frac{1}{2}$

$\therefore a_{10} = \frac{23}{2}$

87. $\sum_{k=1}^{10} (4k + a) = 250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$\dfrac{10(4 + a + 40 + a)}{2} = 250$, $a = 3$

2022 기출 문제

88. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_6=2(S_3-S_2)$일 때, S_{10}의 값은?

① 100 ② 110 ③ 120
④ 130 ⑤ 140

$a_6=2a_3$

$a_3=3d,\ a_1=d=2$

$S_{10}=\frac{10(2+20)}{2}=110$

89. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합을 구하시오.

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$a_m+a_{m+3}=0$

$-90+(m-1)d+(m+2)d=0$

$d=\frac{90}{2m+1}$
$m=1,\ d=30$
$m=2,\ d=18$
$m=4,\ d=10$
$m=7,\ d=6$
$m=22,\ d=2$

$d=10,\ 6,\ 2$일 때, 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 문제의 조건에 해당하는 d의 값의 합은 48

등비수열

2025 기출 문제

90. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=16,\ 2a_8-3a_7=32$일 때, a_9+a_{11}의 값은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2\times16r^2-3\times16r=32$
$(2r+1)(r-2)=0$

$a_1a_2<0$

$r<0,\ r=-\frac{1}{2}$

$a_9+a_{11}=16(r^3+r^5)=-\frac{5}{2}$

91. 모든 항이 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2a_3=2,\ a_4=4$일 때, a_6의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$\frac{4}{r^2}\times\frac{4}{r}=2,\ r=2$

$a_6=a_4\times r^2=16$

92. 첫째항과 공비가 모두 양수 k인 등비수열 $\{a_n\}$이 $\frac{a_4}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}=30$을 만족시킬 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$k^2+k=k(k+1)=30$

$k=5$

2024 기출 문제

93. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\frac{a_3a_8}{a_6}=12$, $a_5+a_7=36$ 일 때, a_{11}의 값은?

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

$\frac{a_3a_8}{a_6}=a_3\times r^2=a_5=12$

$a_7=24$, $r^2=2$

$a_{11}=24\times 4=96$

94. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_4-S_2=3a_4$, $a_5=\frac{3}{4}$일 때, a_1+a_2의 값은?

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_4+a_3=3a_4$, $r=\frac{1}{2}$

$a_1=\frac{a_5}{r^4}=12$, $a_2=6$

$a_1+a_2=18$

2023 기출 문제

95. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2+a_3=\frac{3}{2}$일 때, a_6+a_7의 값을 구하시오.

$r+r^2=6$, $r=2$

$a_6+a_7=r^4(a_2+a_3)=24$

96. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2+a_4=30$, $a_4+a_6=\frac{15}{2}$를 만족시킬 때, a_1의 값을 구하시오.

$\frac{a_4+a_6}{a_2+a_4}=r^2=\frac{1}{4}$, $r=\frac{1}{2}$

$a_1(r+r^3)=\frac{5}{8}a_1=30$

$a_1=48$

2022 기출 문제

97. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_2=36,\ a_7=\frac{1}{3}a_5$일 때, a_6의 값을 구하시오.

$\frac{a_7}{a_5}=r^2=\frac{1}{3},\ a_6=a_2\times r^4=4$

98. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2,\ a_2a_4=36$일 때, $\frac{a_7}{a_3}$의 값을 구하시오.

$\frac{a_7}{a_3}=r^4$

$2r\times 2r^3=36,\ r^4=9$

등비수열의 합

2022 기출 문제

99. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{5}a_{2n-1}$의 값을 구하시오.

(가) $|a_1|=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$ 이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10}a_n=-14$

$\sum_{k=1}^{n}|a_k|=2(2^n-1),\ |a_{n+1}|=2^{n+1}$

$-2,\ -4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdot\ \cdot\ \cdot,512,\ -1024$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=678$

여러 가지 수열1

2025 기출 문제

100. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$ 이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$S_5=4,\ S_6=S_5+a_6=8$

101. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

$285a-450=120$

$a=2$

102. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}ka_k=36,\ \sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+2a_2+\cdots+10a_{10}$

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=a_2+2a_3+\cdots+9a_{10}$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=36-7=29$

103. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+4}=12$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{16}a_k$의 값을 구하시오.

$a_1+a_5=12$
$a_2+a_6=12$
$a_3+a_7=12$
$a_4+a_8=12$

$\sum_{n=1}^{16}a_n=96$

2024 기출 문제

104. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

105. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=10$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{10}b_k=-14$$

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=24$$

106. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}(2b_k-1)$, $\sum_{k=1}^{10}(3a_k+b_k)=33$일 때, $\sum_{k=1}^{10}b_k$의 값을 구하시오.

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=A,\ \sum_{k=1}^{10}b_k=B$$

$$A=2B-10,\ 3A+B=33$$

$$B=9$$

2023 기출 문제

107. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때, $\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$를 만족시키는 c의 값을 구하시오.

$10c = 65 + 5c,\ c = 13$

108. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\ \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^{5} a_k = 10,\ \sum_{k=1}^{5} b_k = 22$

2022 기출 문제

109. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이고 $a_{12} = \frac{1}{2}$일 때, $a_1 + a_4$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$a_{12} = \frac{1}{2},\ a_{11} = 2,\ a_{10} = \frac{1}{4},\ a_9 = 4,\ a_8 = \frac{1}{2}$

$a_1 = 4,\ a_4 = \frac{1}{2}$

110. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^{10} b_k = 14$

$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right) = 14 - 5 = 9$

111. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구하시오.

$a_1=1$
$a_2=2$
$a_3=4$
$a_4=8$
$a_5=1$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=2(1+2+4+8)=30$

여러 가지 수열2

2025 기출 문제

112. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$를 만족시킨다. $b_2=-2$, $b_3+b_7=0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 9항까지의 합은?

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

$b_2=a_1-a_2=-d=-2,\ d=2$

$b_3=a_1-a_2+a_3=a_1+2$
$b_7=a_1-a_2+\cdots+a_7=a_1+6$

$a_1=-4$

$\sum_{k=1}^{9}b_k=9a_1-8a_2+7a_3-6a_4+\cdots+a_9$
$=(a_1-8d)+(a_3-6d)+(a_5-4d)+(a_7-2d)+a_9$
$=5a_1=-20$

113. $a_1=2$인 수열 $\{a_n\}$과 $b_1=2$인 등차수열 $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값은?

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$, $b_2=4$

$b_n=2n$

$\frac{a_n}{b_{n+1}}=n-\frac{1}{2}$, $a_n=2(n+1)\times\left(n-\frac{1}{2}\right)$

$$\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$$
$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}-5=120$$

2024 기출 문제

114. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은?

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1$$

$$\frac{1}{a_1}=3,$$

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n\geq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{10}{21}$$

115. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_6|=a_8$, $\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{5}{96}$일 때, $\sum_{k=1}^{15}a_k$의 값은?

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$a_6+a_8=0,\ a_7=0$

$$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{1}{d}\left(-\frac{1}{6d}+\frac{1}{d}\right)=\frac{5}{6d^2}=\frac{5}{96}$$

$d=4$

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=a_{14}+a_{15}=15d=60$$

2023 기출 문제

116. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n=\frac{1}{n(n+1)}$일 때, $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$$
$$=\sum_{k=1}^{10}S_k-S_{10}=\sum_{k=1}^{9}S_k$$
$$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

117. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$를 만족시킬 때, a_4의 값을 구하시오.

$a_k=a_1 k$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+ \\ \cdots+(4-\sqrt{15})\end{array}\right\}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{a_1}}=2$$

$a_1=\frac{9}{4}$, $a_4=9$

2022 기출 문제

118. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ 1]$에서 $f(x)=\begin{cases}3 & (0<x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$의 값은?

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

$f(\sqrt{1})=f(\sqrt{4})=f(\sqrt{9})=f(\sqrt{16})=1$

$f(\sqrt{k})=3\ (k\neq 1,\ 4,\ 9,\ 16)$

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$=\frac{20(21)}{2}-(1+4+9+16)+\frac{1+4+9+16}{3}$$
$$=190$$

119. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$을 만족시킨다. a_{13}의 값은?

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

$$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12},\ a_{13}=-3$$

수열 고난도

2025 기출 문제

120. 수열 $\{a_n\}$은 $a_2=-a_1$이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n-\sqrt{n}\times a_{\sqrt{n}} & \left(\begin{array}{l}\sqrt{n}\text{이 자연수이고}\\ a_n>0\text{인 경우}\end{array}\right) \\ a_n+1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$를 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

$n=4, n=9$일 때 주의 하면 된다.

$a_{10}=-4$

$a_2=a$라 하면 $a_4=a+2$

	a_5	a_9		a_{10}
$a+2>0$	$a_4-2a_2=2-a$	$6-a$	$6-a>0$	$a_9-3a_3=3-4a$
			$6-a \leq 0$	$7-a$
$a+2 \leq 0$	$a+3$	$a+7$	$a+7>0$	$a_9-3a_3=4-2a$
			$a+7 \leq 0$	$a+8$

1) $3-4a=-4,\ a=\dfrac{7}{4}$

2) $7-a=-4,\ a=11$

3) $4-2a=-4,\ a=4$

$a+2 \leq 0$여야 하므로 문제의 조건에 맞지 않다.

4) $a+8=-4,\ a=-12$

$a_1=12 \text{ or } -11 \text{ or } -\dfrac{7}{4}$

$12\times 11\times \dfrac{7}{4}=231$

121. 양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$ 이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

$a_{n+1}-a_n=-\frac{2}{3}k$ or $a_{n+1}=-ka_n$

a_5	a_4	a_3	a_2
0	0	0	
		$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$
			$\frac{4}{3}k$

$a_3=0$ 이면 $a_2 \times a_3=0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=-\frac{2}{3}$ 인 경우

$a_2=-\frac{2}{3}=-k^2,\ k^2=\frac{2}{3}$

$a_2=-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}k,\ k=-2$ 는 k가 양수이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=\frac{4}{3}k$ 이면 $a_2 \times a_3 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

a_5	a_4	a_3	a_2
0	$\frac{2}{3}k$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3k}$
			$-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k$
		$\frac{4}{3}k$	$-\frac{4}{3}$
			$2k$

$a_2=\frac{2}{3k}$, $a_2=\frac{2}{3k}=-k^2$ 이면 $k<0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=\frac{2}{3k}=\frac{1}{3}k$, $k^2=2$

$a_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=-k^2$ 이면 $a_2 \times a_3>0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$a_2=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}k=\frac{1}{3}k$, $k=2$

$a_2=-\frac{4}{3}=-k^2$, $k^2=\frac{4}{3}$

$a_2=-\frac{4}{3}=\frac{1}{3}k$, $k=-4<0$ 문제의 조건에 맞지 않다.

나머지 경우는 $a_2 \times a_3>0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}+2^2+2=8$

122. 모든 항이 정수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 3 & (|a_n| \text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n = 0 \text{ 또는 } |a_n| \text{이 짝수}) \end{cases}$$

(나) $|a_m| = |a_{m+2}|$인 자연수 m의 최솟값은 3이다.

$|a_3| = |a_5|$

$a_3 = 4k$, $a_5 = k$, $k = 0$

$a_2 = 3$, $a_1 = 6$

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	0	
			3	6

$a_2 = 0$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

$a_3 = 2k$, $a_4 = k$, $a_5 = k-3$ (단, k는 홀수)

$a_3 = 2k$, $a_4 = k$, $a_5 = k-3$

$|2k| = |k-3|$, $k = -3$ or 1

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-6	-3	-6	-12	-24
			-12	-9
			-3	
-2	1	2	4	8
				7
			5	10

$a_2 = -3$ 이면 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

$a_3 = k$(단, k는 홀수)

$a_3 = k,\ a_4 = k-3,\ a_5 = \dfrac{k-3}{2}$

$|k| = \left|\dfrac{k-3}{2}\right|,\ k = -3$ or 1

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1
-3	-6	-3	-6	
-1	-2	1	2	

위의 경우 모두 조건 (나)에서 자연수 m의 최솟값은 2이다.

64

2024 기출 문제

123. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값을 합을 구하시오.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$ 이다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$			

$k=2$ 이면 $a_3=0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k=1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	-2	1	-6	1	-10

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$

$k \ge 3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$		

$k=4$ 이면 $a_3=0$, $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

$k=3$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
3	-2	-1	2	-9	-2

$k \ge 5$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$	$16-3k$	

$k=5$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
5	-2	-3	-2	1	$a_6<0$

$k \geq 6$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
k	-2	$2-k$	$8-2k$	$16-3k$	$26-4k$

$a_6>0$, $26-4k>0$, $k<\dfrac{13}{2}$

$k=6$

$k \geq 7$이면 $a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$ 이므로 문제의 조건에 맞지 않다.

124. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

$a_2=4k$, $a_3=2k$, $a_4=k$
$5k=40$, $k=8$, $a_1=31$
$a_2=32$, $a_1=64$ or 31

$a_2=2k$(단, k는 홀수), $a_3=k$, $a_4=k+1$
$3k+1=40$, $k=13$
$a_2=26$, $a_1=52$ or 25

$a_2=k$(단, k는 홀수), $a_3=k+1$, $a_4=\frac{k+1}{2}$
$k+\frac{k+1}{2}=40$, 자연수 k는 존재하지 않는다.

$31+25+64+52=172$

125. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

a_6이 짝수이면, $a_7=\frac{1}{2}a_6$, $a_6=2$

a_6이 홀수이면, $a_7=2^{a_6}$, $a_6=1$

1) $a_6=1$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
32	16	8	4	2	1
6	3				
8	4	2	1		
2	1				

2) $a_6=2$인 경우

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
64	32	16	8	4	2
5					
12	6	3			
16	8	4	2	1	
3					
4	2	1			
1					

153

2023 기출 문제

126. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다. $a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합을 구하시오.

$a_1=0$이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$ 이다.

$$a_2=\frac{1}{k+1}>0$$

$$a_3=\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}<0$$

$$a_4=\frac{2}{k+1}-\frac{1}{k}=\begin{cases} 0 & (k=1) \\ \dfrac{2}{k+1}-\dfrac{1}{k}>0 & (k\neq 1) \end{cases}$$

$k=1$이면 $a_{22}=0$

$$a_5=\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k}<0$$

$$a_6=\frac{3}{k+1}-\frac{2}{k}$$

$$=\begin{cases} 0 & (k=2) \\ \dfrac{3}{k+1}-\dfrac{2}{k}>0 & (k\neq 1,\ k\neq 2) \end{cases}$$

$k=2$ 이면 $a_{22}\neq 0$

$$a_7=\frac{3}{k+1}-\frac{3}{k}<0$$

$$a_8=\frac{4}{k+1}-\frac{3}{k}=\begin{cases} 0 & (k=3) \\ \dfrac{4}{k+1}-\dfrac{3}{k} & (k\neq 1,2,3) \end{cases}$$

$k=3$ 이면 $a_{22}=0$

• • •

$\therefore$ $k=1, 3, 10$ 일 때, $a_{22}=0$

127. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다. (단, r는 $0<\lvert r\rvert<1$인 상수이다.) (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (\lvert a_n\rvert<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (\lvert a_n\rvert\geq 5) \end{cases}$ 이다.

$\lvert a_m\rvert\geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값을 구하시오.

$a_4=r,\ a_8=r^2\ \ 0<\lvert r\rvert<1$

$a_5=r+3,\ a_6=r+6,\ a_7=-\frac{1}{2}r-3,$

$a_8=-\frac{1}{2}r=r^2$

$r=-\frac{1}{2}=a_4,\ a_3=-\frac{7}{2},\ a_2=7,\ a_1=-14$

$a_5=\frac{5}{2},\ a_6=\frac{11}{2},\ a_7=-\frac{11}{4},\ a_8=\frac{1}{4}$

$a_9=\frac{13}{4},\ a_{10}=\frac{25}{4},\ a_{11}=-\frac{25}{8},\ a_{12}=-\frac{1}{8}$

$\therefore p=26,\ a_1=-14$

128. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오.

(가) $a_7=40$이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$ 이다.

a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
		120	40	160	200
	$3a$	a	$a=10$		
	30	10	40	50	90
$3a$	a	$4a$	$a=8$		
		32	40	72	24

a_4가 3의 배수이면 a_8이 3의 배수

a_5가 3의 배수이면 a_9이 3의 배수

a_3이 3의 배수이면 a_7이 3의 배수인데 $a_7=40$ 이므로 a_3이 3의 배수이면서 문제의 조건에 맞는 경우는 존재하지 않는다.

a_2이 3의 배수이면 a_6이 3의 배수이고 이 경우는 첫 번째에 계산 했으므로 더 이상 계산하지 않아도 된다.

$\therefore a_9=200$ or 90 or 24

2022 기출 문제

129. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} -2a_n-2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n+2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5+a_6=0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$　② 5　③ $\frac{11}{2}$　④ 6　⑤ $\frac{13}{2}$

$-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$ 는 가정에 모순

$a_6=-2a_5-2,\ a_5+a_6=-a_5-2=0,\ a_5=-2$

$-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$

$a_6=2a_5,\ a_5+a_6=3a_5=0,\ a_5=0$

$\frac{1}{2} < a_5 \le 1$ 는 가정에 모순

$a_6=-2a_5+2,\ a_5+a_6=-a_5+2=0,\ a_5=2$

$a_5=0,\ a_4=-1 \text{ or } 0 \text{ or } 1$

$a_4=-1$ 이면 $a_3<0,\ a_2<0,\ a_1<0$이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

$a_4=0,\ a_3=0,\ 1$ ($a_3=-1$ 이면 $\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$)

$a_3 = 0,\ a_2 = 0,\ a_1 = 1$

$a_3 = 0,\ a_2 = 1,\ a_1 = \frac{1}{2}$

$a_3 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_1 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$

$a_4 = 1,\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$,
$a_1 = \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 = \frac{9}{2}$

다음과 같은 함수의 그래프를 이용해서 풀 수도 있다.