수학 영역

제 2 교시

1. $\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[8]{9}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{3}$ ② 3 ③ $3\sqrt{3}$ ④ 9 ⑤ $9\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[8]{9}}=\sqrt[4]{81}=3$

2. 함수 $f(x)=x^3+x$에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}$의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$f(1)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=f'(1)$

$f'(x)=3x^2+1,\ f'(1)=4$

3. $\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\dfrac{4}{5}$이고 $\sin\theta\cos\theta>0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{4}{5}$ ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{3}{4}$ ④ $\dfrac{4}{5}$ ⑤ $\dfrac{4}{3}$

$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\theta\right)=-\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

4. 두 상수 a, b에 대하여 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{2}{x+1}-a\right)=b$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{9}$ ② $\dfrac{2}{9}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{4}{9}$ ⑤ $\dfrac{5}{9}$

$a=\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{2}{9}$

$a+b=\dfrac{4}{9}$

5. 양수 a에 대하여 곡선 $y=-\frac{1}{a}x^3$과 두 직선 $y=ax$, $x=2$으로 둘러싸인 부분의 넓이의 최솟값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$$\int_0^2\left(ax+\frac{1}{a}x^3\right)dx=2a+\frac{4}{a}\geq 4\sqrt{2}$$

6. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_n=2n-1$일 때, 이 $\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$의 값은? [3점]

① 225 ② 285 ③ 289 ④ 385 ⑤ 440

$$S_k=\sum_{n=1}^{k}a_n=\sum_{n=1}^{k}(2n-1)=k^2$$

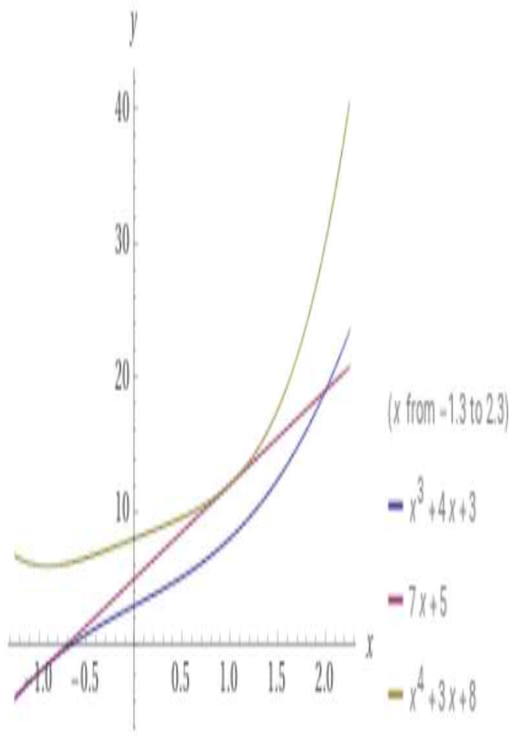
$$\sum_{k=1}^{10}(S_k-a_k)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}S_k-S_{10}=\sum_{k=1}^{9}k^2$$

$$=\frac{9\times10\times19}{6}=285$$

7. 곡선 $y=x^3+4x+3$ 위의 점 $(-1,\ -2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8



$y=7x+5$

$7\alpha+5=\alpha^4+3\alpha+a$

$7=4\alpha^3+3,\ \alpha=1,\ a=8$

8. 자연수 n에 대하여 x에 관한 이차방정식 $(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$의 두 근이 $\alpha_n, \beta_n\ (\alpha_n > \beta_n)$일 때, $\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n-\beta_n)$의 값은? [3점]

① $\frac{6}{7}$ ② $\frac{19}{21}$ ③ $\frac{20}{21}$ ④ 1 ⑤ $\frac{22}{21}$

$\{(2n+1)x-1\}\{(2n-1)x-1\}=0$

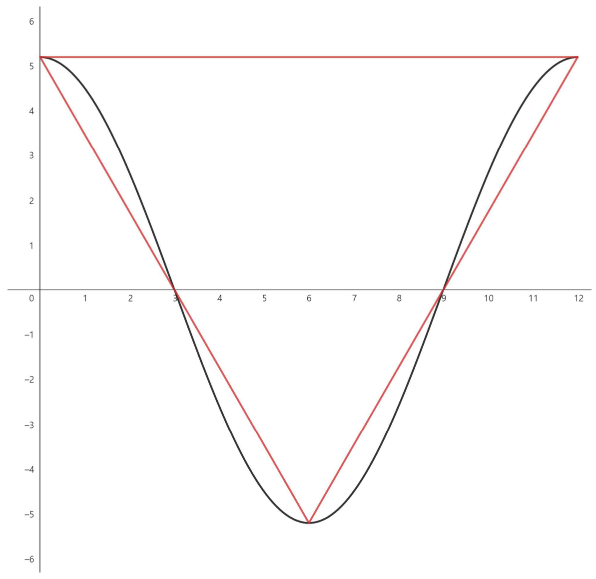
$\alpha_n=\frac{1}{2n-1},\ \beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$\sum_{n=1}^{10}(\alpha_n-\beta_n)=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdot\cdot\cdot+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$
$=\frac{20}{21}$

9. $0\le x\le 12$에서 함수 $f(x)=a\cos b\pi x$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점 A, B에서만 만난다. 두 점 A와 B사이의 거리가 최대가 되도록 하는 세 양수 a, b, k에 대하여 $y=f(x)$와 $y=-k$가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ABC는 정삼각형이다. $\frac{ak}{b}$의 값은?

① 81 ② $81\sqrt{2}$ ③ $81\sqrt{3}$ ④ 162 ⑤ 243

선분 AB의 길이는 12일 때가 최대이다.



그러므로 $\frac{2\pi}{b\pi}=12,\ b=\frac{1}{6}$

$a=k=3\sqrt{3}$

$\frac{ak}{b}=6\times(3\sqrt{3})^2=162$

10. 수직선 위의 점 $A(7)$과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)=3t^2-4t+a\ (a>0)$라 하자. 시각 $t=3$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 17일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$\int_0^3 (3t^2-4t+a)dt = [t^3-2t^2+at]_0^3$
$=9+3a$

$|9+3a-7|=17$

$a=5$

11. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2가 되도록하는 자연수 k의 값은? [4점]

$(\sqrt{2})^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -4이다.

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

$x^4=(\sqrt{2})^{f(n)}$

$x=\pm 2^{\frac{f(n)}{8}}$

$2^{\frac{f(n)}{8}} \times \left(-2^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-4$

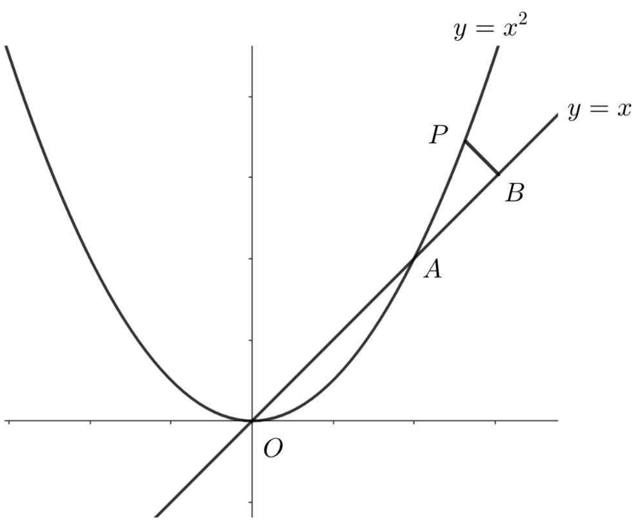
$2^{\frac{f(n)}{8}}=2,\ f(n)=8$

$f(1)=f(4)=8$

$k+4=8,\ k=4$

12. 직선 $y=x$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 곡선 $y=x^2$ 위의 A가 아닌 점을 $P(t, t^2)$이라 할 때, 점 P에서 $y=x$에 내린 수선의 발을 B라 하자. $\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$



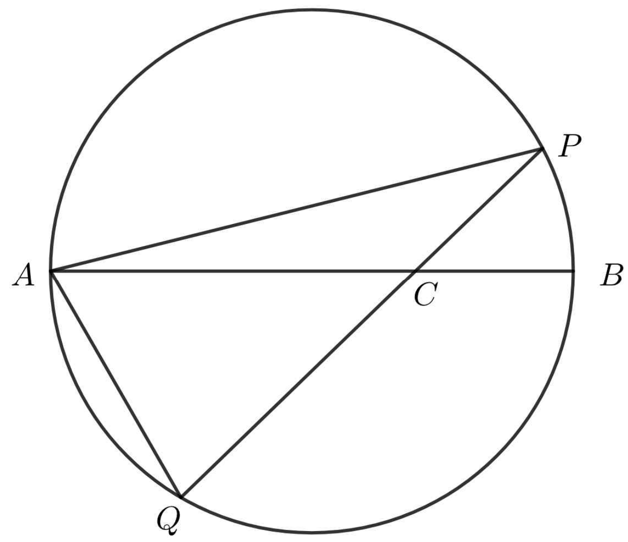
$A(1, 1)$, $P(t, t^2)$, $B\left(\frac{t^2+t}{2}, \frac{t^2+t}{2}\right)$

$\overline{AB}=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+t}{2}-1\right|$, $\overline{PB}=\sqrt{2}\left|\frac{t^2+t}{2}-t\right|$

$\lim_{t\to1}\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\lim_{t\to1}\frac{|t^2-t|}{|t^2+t-2|}=\frac{1}{3}$

13. 그림과 같이 AB를 지름으로 하는 원에 내접하는 삼각형 APQ가 있다. 선분 PQ와 선분 AB의 교점을 C라 할 때, 삼각형 ACQ의 둘레의 길이는 18이고 $\sin(\angle ABP)=2\sqrt{6}\cos(\angle AQP)$를 만족시킨다. $\overline{AQ}$, $\overline{QC}$, $\overline{CA}$는 순서대로 등차수열을 이룰 때, 선분 BC의 길이는? [4점]

① 2 ② $\frac{40}{19}$ ③ $\frac{42}{19}$ ④ $\frac{44}{19}$ ⑤ $\frac{46}{19}$



$\overline{AQ}+\overline{CA}=2\overline{QC}$, $\overline{QC}=6$

$\cos(\angle ABP)=\cos(\angle AQC)=\frac{1}{5}$

$\overline{AQ}=x$, $\overline{AC}=12-x$

$(12-x)^2=x^2+6^2-2x\times6\times\frac{1}{5}$

$x=5$

$\overline{BC}=y$라 하면

$\overline{PB}=\frac{7+y}{5}$

$5:6=\frac{7+y}{5}:y$

$y=\frac{42}{19}$

14. 곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$이 두 곡선 $y=2^{x}$, $y=2^{x-1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는대로 고른 것은?

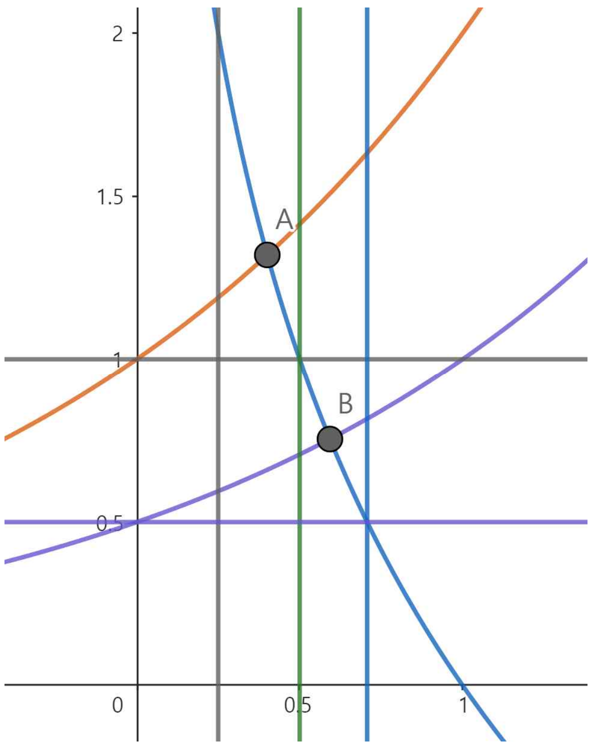
〈보기〉

ㄱ. $\frac{1}{4}<x_1<\frac{1}{2}$

ㄴ. $\frac{1}{2}<x_2<\frac{1}{\sqrt{2}}$

ㄷ. $0<y_1-y_2<\frac{3}{2}$

① ㄷ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



ㄱ. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}>2^{\frac{1}{4}}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}<2^{\frac{1}{2}}$ 이므로 참

ㄴ. $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}>2^{\frac{1}{2}-1}$, $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}<2^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1}$ 참

ㄷ. $1<y_1<2$, $\frac{1}{2}<y_2<1$

$0<y_1-y_2<\frac{3}{2}$

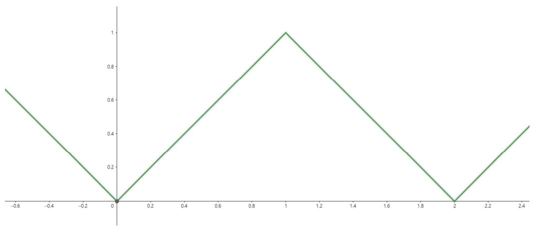
15. 함수 $f(x)$는 $f(x)=||x-1|-1|$이다. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g(2)$의 값은? [4점]

(가) $0<x<2$에서 함수 $h(x)$가 극대가 되는 x의 개수가 3이고, 이때 극댓값이 모두 동일하다.

(나) 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이고 최솟값은 0이다.

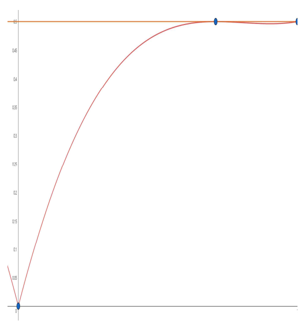
① $5-2\sqrt{2}$ ② $5-\sqrt{2}$ ③ 5
④ $5+\sqrt{2}$ ⑤ $5+2\sqrt{2}$

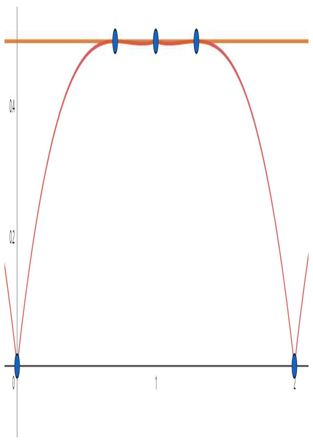
$f(x)=\begin{cases} -x & (x<0) \\ x & (0\le x<1) \\ -x+2 & (1\le x<2) \\ x-2 & (2\le x) \end{cases}$ 이므로



$h(x)$의 그래프는 구간 $[0, 1]$에서 $g(x)$의 그래프와 같고 구간 $[1, 2]$에서는 $g(x)$의 그래프를 $x=1$에 대하여 대칭이동 시킨 그래프이다.

(가)와 (ㄴ) 조건을 만족시키기 위해서는 구간 $[0, 1]$에서 $g(x)$의 그래프가 다음 그래프 형태여야 한고 구간 $[0, 2]$에서 $h(x)$의 그래프는 다음 그래프 형태여야 한다.





함수 $g(x)$의 그래프가 $y=\frac{1}{2}$에 접해야 하며(극댓값이 $\frac{1}{2}$이므로), $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$를 지나야 하고 $(0,\ 0)$도 지나야 한다.

$\therefore\ g(x)=(x-a)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$\therefore\ g(x)=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}$

$g(2)=5-2\sqrt{2}$

16. x에 대한 부등식 $4^{|x|}-17\times 2^{|x|}+16<0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구하시오.

$\left(2^{|x|}-1\right)\left(2^{|x|}-16\right)<0$

$1<2^{|x|}<2^4$

$0<|x|<4$

$x=-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3$

6개

17. 함수 $f(x)=x^3+ax$가 양의 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 2x$ 을 만족시킬 때, $\int_0^4 f(x)dx$의 최솟값을 구하시오. [3점]

$f(0)=0$이므로 부등식 $f(x)\geq 2x$ 을 만족시키기 위해서는 $f'(0)\geq 2$을 만족시켜야 하므로 $a\geq 2$

$\int_0^4 f(x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^4$
$=64+8a\geq 80$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}a_k=15$일 때, $\sum_{k=1}^{10}c(a_k-1)=80$ 를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10}c(a_k-1)=15c-10c=80$

$c=16$

19. $y=5^{x-3}+2$ 의 역함수를 $y=f(x)$ 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 점근선이 $y=\tan\frac{3\pi}{b}x+4$ 의 점근선이 되도록 하는 모든 양의 정수 b 의 값의 합을 구하시오. [4점]

$f(x)=\log_5(x-2)+3$이므로 점근선은 $x=2$

$y=\tan\frac{3\pi}{b}x+4$의 점근선은 정수 n에 대하여 $\frac{nb}{3}+\frac{b}{6}$이므로

$b=\frac{12}{2n+1}$

$n=0$ 일 때, $b=12$
$n=1$ 일 때, $b=4$

$4+12=16$

20. 함수 $f(x)=x^2$가 있다. 3이상의 양수 t에 대하여 점 $(t,0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 t의 값을 $g(s)$라 하자. 함수 $g(s)$의 역함수를 $h(s)$라 할 때 $\int_{18}^{132}h(s)ds$의 값을 구하시오.

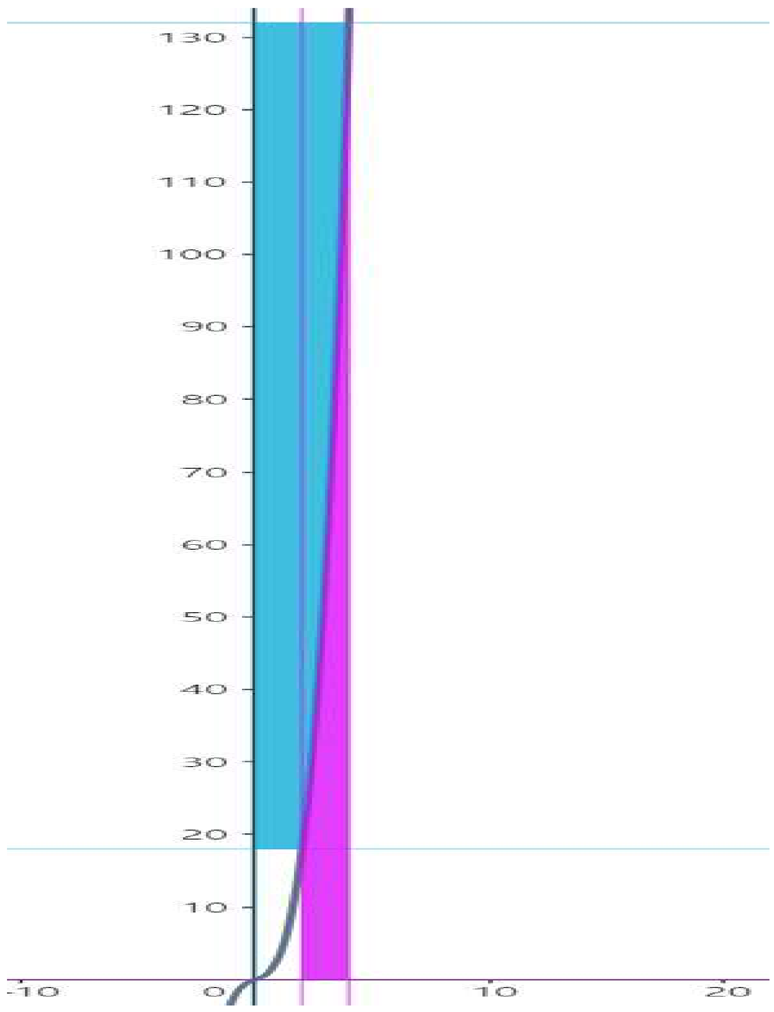
$\frac{f(s)-0}{s-t}\times f'(s)=-1$ 이므로

$s^2\times 2s=t-s$

$t=2s^3+s,\ g(s)=2s^3+s$

$g(2)=18,\ g(4)=132$

$\int_{18}^{132}h(s)ds$
$=4\times 132-2\times 18-\int_2^4 g(s)ds$
$=528-36-126=366$



21. 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=3\log_2 x$는 $f(2)=g(2)$, $f(8)=g(8)$이다. 자연수 n 대하여 부등식 $2^{x-n} \le (x-n-1)^3$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 a_n이라 할 때, $\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오.

$f(2)=g(2)$, $f(8)=g(8)$이므로
$2 \le x \le 8$일 때, $x+1 \le 3\log_2 x$를 만족한다.

$2^{x-n} \le (x-n-1)^3$

$x-n \le 3\log_2(x-n-1)$
이므로
$2 \le x-n-1 \le 8$

$n+3 \le x \le n+9$

$$a_n = \frac{7(n+3+n+9)}{2} = 7(n+6)$$

$$\frac{1}{7}\sum_{n=1}^{10} 7(n+6) = \frac{10(7+16)}{2} = 115$$

22. 첫째항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \ge 0) \\ -3a_n + 2 & (a_n < 0) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_4 + a_5 = 10$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{103} a_k$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값을 구하시오.

$a_4 > 0$, $a_5 = a_4 - 6$,
$2a_4 - 6 = 10$, $a_4 = 8$

$a_4 < 0$, $a_5 = -3a_4 + 2$,
$-2a_4 + 2 = 10$, $a_4 = -4$

$a_4 = 8$, $a_5 = 2$, $a_6 = -4$, $a_7 = 14$,
$a_8 = 8$, $a_9 = 2$, • • •

$a_4 = -4$, $a_5 = 14$, $a_6 = 8$, $a_7 = 2$,
$a_8 = -4$, $a_9 = 14$, • • •

8, 2, -4, 14 이 반복되므로

$\sum_{k=4}^{103} a_k$의 값은 $24(8+2-4+14)$로 동일하다.

a_4	a_3	a_2	a_1
8	14	20	26
8	14	20	-6
8	14	-4	2
8	-2	4	10
-4	2	8	14
-4	2	8	-2

$M - m = 52$

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{3^{n-1}}-\dfrac{2}{4^{n+1}}}{\dfrac{3}{3^{n+1}}+\dfrac{1}{4^n}}$의 값의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ 9 ④ 15 ⑤ 16

15

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}$의 값을 구하시오.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1$

25. 자연수 n에 대하여 점 $A(-2, 0)$에서 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{n}\right)^2$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

$y=m(x+2)$

$mx-y+2m=0$

$d=\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{n}$

$m^2+1=4n^2m^2$

$m^2=\frac{1}{4n^2-1}$

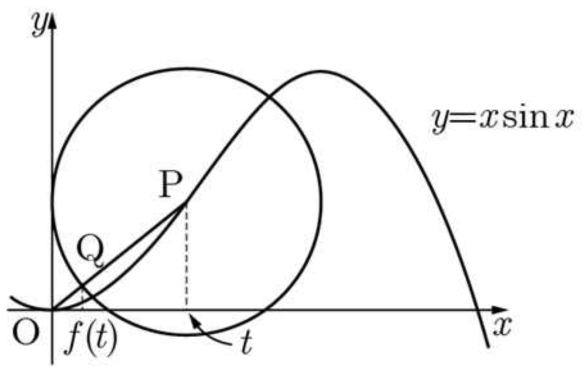
$m_1\times m_2=-\frac{1}{4n^2-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=-\frac{1}{2}$

26. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $P(t, t\sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 P', Q'이라 하면

$\overline{OP'}=t$, $\overline{OQ'}=f(t)$,

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$,

$\overline{OQ}=\overline{OP}-\overline{PQ}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP'과 삼각형 OQQ'은 서로 닮음이므 로

$\overline{OP'}:\overline{OQ'}=\overline{OP}:\overline{OQ}$

$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

$$f(t)=\frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{2t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{2t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{2t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{2t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}{2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

27. 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$이 있다. $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$를 만족시키는 $f'(t)$의 최댓값이 1이 되도록 하는 k의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식이고 $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$를 만족시키는 $f'(t)$의 최댓값이 1이므로 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=x$에 접한다.

접점의 x좌표를 α라 하면 $f(\alpha)=\alpha$, $f'(\alpha)=1$ 이므로

$k\alpha^2e^{-\alpha}=\alpha$, $2k\alpha e^{-\alpha}-k\alpha^2e^{-\alpha}=1$ 에서

$\therefore\ \alpha=1$, $k=e$

28. 함수 $f(x)=(x-1)^2e^x-(ax+b)$ (단, a, b는 실수)에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2\int_2^x f(t)dt-\int_2^x t^2f(t)dt$라 하자. $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $g(x_1)<g(x_2)$가 되도록 a, b의 값을 정할 때, $4a+3b$의 값은?

① e^2-3 ② e^2-4 ③ e^2-5 ④ $2e^2-3$ ⑤ $2e^2-5$

$g'(x)=2x\int_2^t f(t)dt \ge 0$

$f(2)=0,\ \int_2^0 f(t)dt=0$

$e^2-(2a+b)=0$

$\left[(x-1)^2e^x-\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\right]_2^0-\int_2^0 2(x-1)e^x dx$

$=\left[(x-1)^2e^x-\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)\right]_2^0-\left[2(x-1)e^x\right]_2^0+\int_2^0 2e^x dx$

$=\left[(x-1)^2e^x-\left(\frac{1}{2}ax^2+bx\right)-2(x-1)e^x+2e^x\right]_2^0$

$=(1+4)-(e^2-2e^2+2e^2-2a-2b)$

$2a+b=e^2$
$2a+2b=e^2-5$

$4a+3b=2e^2-5$

29. 함수 $f(x)=e\left\{\sin(e^x)+1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$와 상수 k에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases}\ln f(x) & (x\le a)\\ kf(x) & (x>a)\end{cases}$라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(x)\ne 0$인 모든 실수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, a_3, \cdots$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{m} g'(a_n)=\pi$를 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

$kf(a)=\ln f(a)$

$g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)}{f(x)} & (x<a)\\ kf'(x) & (x>a)\end{cases}$

$\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a-} g'(x)$, $\frac{f'(a)}{f(a)}=kf'(a)$

$f(a)=\frac{1}{k}$

$f(a)=e,\ k=\frac{1}{e}$

$e\left\{\sin e^a+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=e,\quad \sin e^a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$e^a=\frac{3\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6},\ \frac{11\pi}{2}\pm\frac{\pi}{6},\ \cdots$

$f'(x)=e^{x+1}\cos e^x$에서
$g'(x)=kf'(x)=e^x\cos e^x$

$g'(a_{2n-1})+g'(a_{2n})=\frac{\pi}{6}$

$\sum_{n=1}^{6}\{g'(a_{2n-1})+g'(a_{2n})\}=\frac{\pi}{6}\times 6=\pi$

$m=12$

30. 이차함수 $f(x)$에 대하여 등식 $f(\ln t)=tg(t)$가 양수 t에 대하여 성립할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$는 $t=1$일 때 극댓값 4를 갖는다.
(나) $\int_1^e g(t)dt=5$

구간 $(0,k]$에서 함수 $g(x)$가 증가하도록 하는 실수 k의 최댓값 m에 대하여 구간 $(0,m]$에서 함수 $g(x)$의 역함수를 $h(x)$라 하자. $\int_0^{g(m)} h(x)dx=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

$g(1)=4$, $g'(1)=0$

$g(1)=\frac{f(\ln 1)}{1}=f(0)=4 \quad \therefore f(0)=4$

$g'(t)=\frac{f'(\ln t)-f(\ln t)}{t^2}$

$g'(1)=\frac{f'(\ln 1)-f(\ln 1)}{1}=f'(0)-f(0) \quad \therefore f'(0)=4$

$f(x)=ax^2+4x+4$

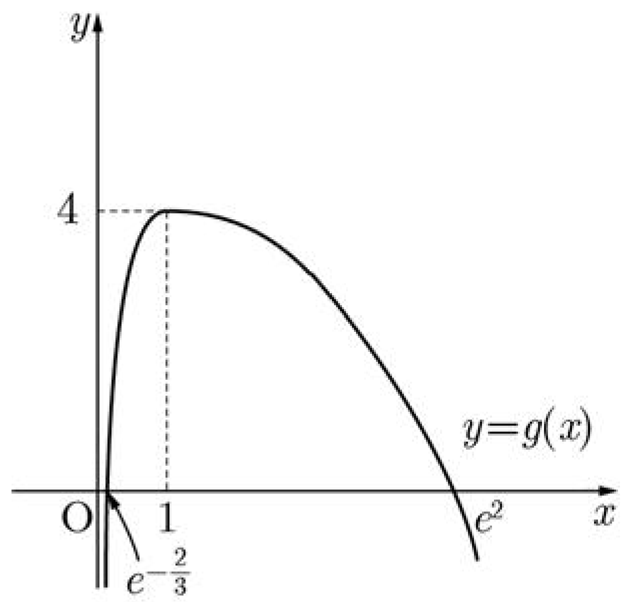
$\int_1^e g(t)dt=\int_1^e \frac{f(\ln t)}{t}dt=\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}a+6=5,\ a=-3$

$\therefore f(x)=-3x^2+4x+4$

$f(x)=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$이므로

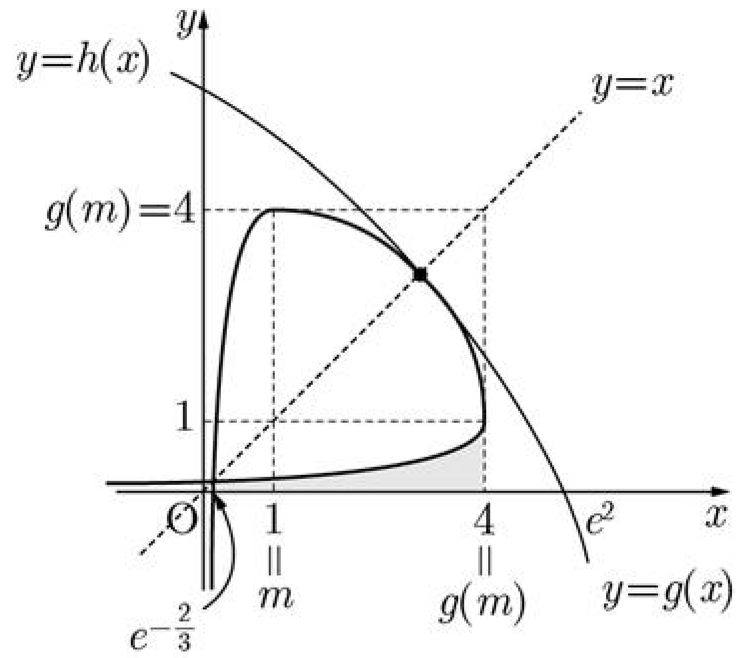
$g(x)=\frac{f(\ln x)}{x}=0$에서 $x=e^{-\frac{2}{3}}$ 또는 $x=e^2$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고,



구간 $(0,k]$에서 함수 $g(x)$가 증가하도록 하는 실수 k의 최댓값 m은 극대일 때의 x값 1

따라서 $\int_0^{g(m)} h(x)dx$는 다음 그림의 표시된 부분의 넓이이므로



$\int_0^{g(m)} h(x)dx=(1\times 4)-\int_{e^{-\frac{2}{3}}}^{1} g(x)dx$

$=4-\int_{-\frac{2}{3}}^{0} f(u)du$

$=4-\int_{-\frac{2}{3}}^{0} (-3u^2+4u+4)du$

$=4-\left[-u^3+2u^2+4u\right]_{-\frac{2}{3}}^{0}$

$=4-\frac{40}{27}=\frac{68}{27}$