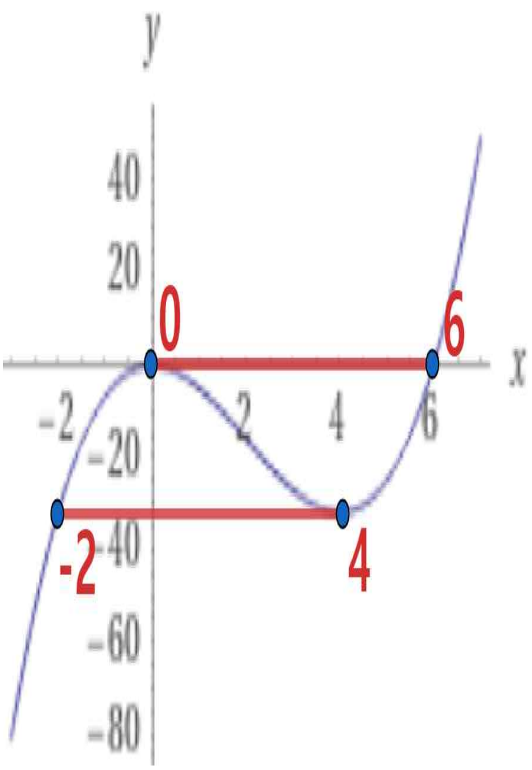
#1 2025 수능 대비 학습지

1. 함수 $f(x)=x^3-6x^2$에 대하여 방정식 $f(x)=f(a)$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

$f(x)=x^3-6x^2$ 의 그래프가 다음과 같으므로

$a=-2$ or 0 or 4 or 6

$-2+0+4+6=8$



2. 함수 $f(x)=x^3-3ax^2-9a^2x+5\,(a>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 범위가 $-9\le t\le b$일 때, $2a+3b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

$f'(x)=3x^2-6ax-9a^2$
$=3(x+a)(x-3a)$

$-3a\le t\le 5a$

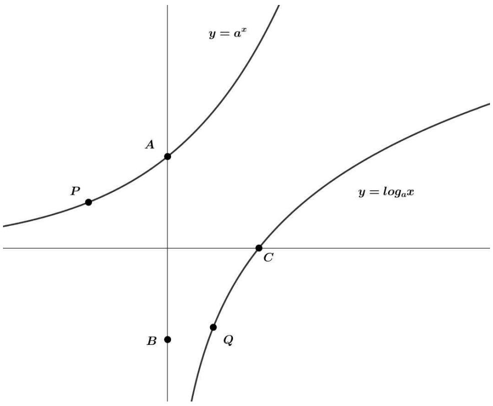
$-3a=-9,\ a=3,\ b=5a=15$

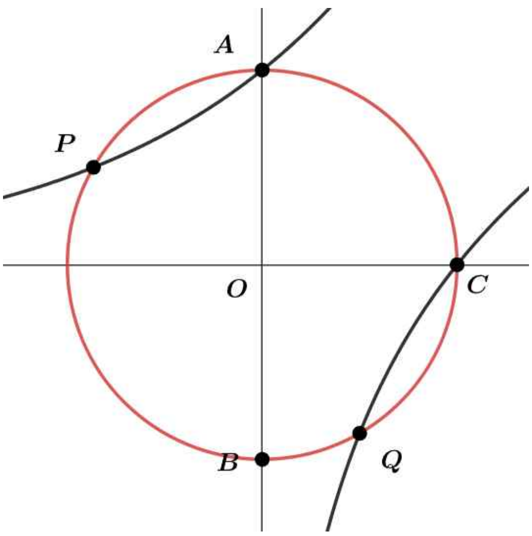
$2a+3b=6+45=51$

3. 그림과 같이 좌표평면 위의 세 점 $A(0,\ 1)$, $B(0,\ -1)$, $C(1,\ 0)$이 있다. $1<a$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=a^x$위의 점 P와 함수 $g(x)=\log_a x$ 위의 점 Q가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2\sqrt{3})$의 값을 구하시오.

(가) 두 직선 $AP,\ BP$의 기울기의 곱은 -1이다.

(나) 두 점 PQ를 지나는 직선의 기울기는 -1이고, $\angle AQP=\dfrac{\pi}{6}$이다.





두 직선 $AP,\ BP$의 기울기의 곱이 -1이므로 점 P는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

두 함수 $f(x),\ g(x)$는 역함수이고 기울기가 -1인 직선은 자기 자신이 역함수 이므로 두 점 $P,\ Q$는 $y=x$에 대하여 대칭이다. 그러므로 점 Q도 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점이다.

원주각 중심각의 성질에 의하여 $\angle AQP=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $\angle AOP=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로

$$P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$a^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{2},\ a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$$

$$f(2\sqrt{3})=a^{2\sqrt{3}}=2^4=16$$

4. 모든 자연수 n에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + a_{n+1} = n$을 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{50} k(a_{k+1} - a_k) = 1125$일 때, a_1 의 값을 구하시오.

$\sum_{k=1}^{50} k(a_{k+1} - a_k)$
$= (a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) + \cdot\cdot\cdot + 50(a_{51} - a_{50})$
$= -(a_1 + a_2 + \cdot\cdot\cdot + a_{50}) + 50a_{51}$

$-(1+3+5+\cdot\cdot\cdot+49) + 50\times 25$
$= -25^2 + 50\times a_{51} = 1125,\ a_{51} = 35$

$a_1 = a,\ a_2 = 1-a$
$a_3 = a+1,\ a_4 = 2-a$
$a_5 = a+2,\ a_6 = 3-a$
$\cdot\cdot\cdot$

$a_{51} = a + 25 = 35,\ a = 10$

5. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x) = \frac{1}{2}f(x) + 1$
(나) $(f \circ g)(x) = \int_0^x f(t)dt - 2x^2 + 6x + 10$

$x > 0$에서 함수 $h(x)$가 미분가능하고 $g(x) \le h(x) \le f(x)$이다. $h(1) = 4,\ h(3) = 14$일 때, $h'(1) + h'(3)$의 값을 구하시오.

$f(x)$가 n차 다항식이면 $g(x)$도 n차 다항식이고 $(f \circ g)(x)$는 n^2차 이고 $\int_0^x f(t)dt$는 $n+1$차식 이므로 $f(x)$는 1차식이다.

$\int_0^x f(t)dt - 2x^2$은 1차식이므로 $f(x) = 4x + a$

$g(x) = 2x + \frac{a}{2} + 1$

$g(0) = \frac{a}{2} + 1$

$f(g(0)) = 10 = f\left(\frac{a}{2} + 1\right) = 2a + 4 + a$

$a = 2$

$f(x) = 4x + 2,\ g(x) = 2x + 2$

$f(4) = h(4),\ h'(3) = 4$

$g(1) = h(1),\ h'(1) = 2$

$h'(1) + h'(3) = 6$

6. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 $f(n)=S_{2n-1}+S_{2n+1}$이라 하자. a_4가 11의 배수이고 $\sum_{k=1}^{4} f(k)=832$일 때, a_8의 값을 구하시오.

$a_4=11p$

$\sum_{k=1}^{4} f(k)=S_1+2(S_3+S_5+S_7)+S_9$
$=a_1+2(3a_2+5a_3+7a_4)+9a_5$
$=a_4-3d+6(a_4-2d)+10(a_4-d)+14a_4+9(a_4+d)$
$=40a_4-16d=832$

$a_4=\dfrac{832+16d}{40}=\dfrac{208+4d}{10}$, $d=3$, $a_4=22$

$a_4=44$, $d=58$, $a_3<0$

$a_8=22+12=34$

7. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f'(t)dt=2xf'(x)+5x^3-6x^2-4x$$

을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.

$$\int_0^x f'(t)dt=f(x)-f(0)$$

$f(x)-f(0)=2xf'(x)+5x^3-6x^2-4x$

이므로 $f(x)$가 최고차항의 계수가 a인 n차 다항식이라 하면 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 an인 $n-1$차 다항식이다.

$n\geq 4$이면 좌변과 우변의 최고차항의 계수가 다르므로 사차 이상의 다항식 $f(x)$는 존재하지 않는다.

$n=3$이므로 $a=2a\times 3+5$, $a=-1$

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$-x^3+ax^2+bx$
$=2x(-3x^2+2ax+b)+5x^3-6x^2-4x$

$f'(x)=-3x^2+4x+4$

$f'(1)=5$

8. 자연수 n에 대하여 두 함수 $y=x^2$와 $y=2x+n$가 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B 사이의 거리의 제곱을 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{5} a_n$의 값을 구하시오.

방정식 $x^2=2x+n$ 의 해를 α_n, β_n이라

$$x^2-2x-n=0$$

하면 $A(\alpha_n,\ 2\alpha_n+n)$, $B(\beta_n,\ 2\beta_n+n)$ 이므로 $a_n=5(\beta_n-\alpha_n)^2$

$\alpha_n+\beta_n=2$, $\alpha_n\beta_n=-n$

$$(\beta_n-\alpha_n)^2=(\beta_n+\alpha_n)^2-4\alpha_n\beta_n$$
$$=4+4n$$

$$a_n=20n+20$$

$$\sum_{n=1}^{5}(20n+20)=20\times\frac{5\times6}{2}+100=400$$

요즘 수능에서 가끔 근의 공식을 이용한 문제도 출제됩니다. 그리고 계산이 약간 더러운 문제도 출제되므로 당황하지 않도록 평상시에 연습을 많이 해두기 바랍니다.

9. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> (가) $2(a_{n+1})^2+3a_na_{n+1}-2(a_n)^2=0$
>
> (나) $a_na_{n+1}a_{n+2}<0$

$a_{14}a_{15}>0$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_{3k}=310$일 때, $\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}$의 값을 구하시오.

$$2(a_{n+1})^2+3a_na_{n+1}-2(a_n)^2=0$$

$$(2a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+2a_n)=0$$

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n\\ -2a_n\end{cases}$$

$a_{14}a_{15}>0$, $a_{14}<0$, $a_{15}<0$ 이라 하면 $a_n<0$이므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

$a_{14}>0$, $a_{15}>0$, $a_{13}<0$, $a_{16}<0$

$a_{3k}>0$, $a_{3k-1}>0$, $a_{3k-2}<0$

$a_1=a<0$

$a,\ -2a,\ -a,\ 2a,\ -4a,\ -2a,$
$4a,\ -8a,\ -4a,\ \cdots$

$a_3=-a$, $a_6=-2a$, $a_9=-4a$, $\cdots$

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\frac{-a(2^5-1)}{2-1}=310,\ a=-10$$

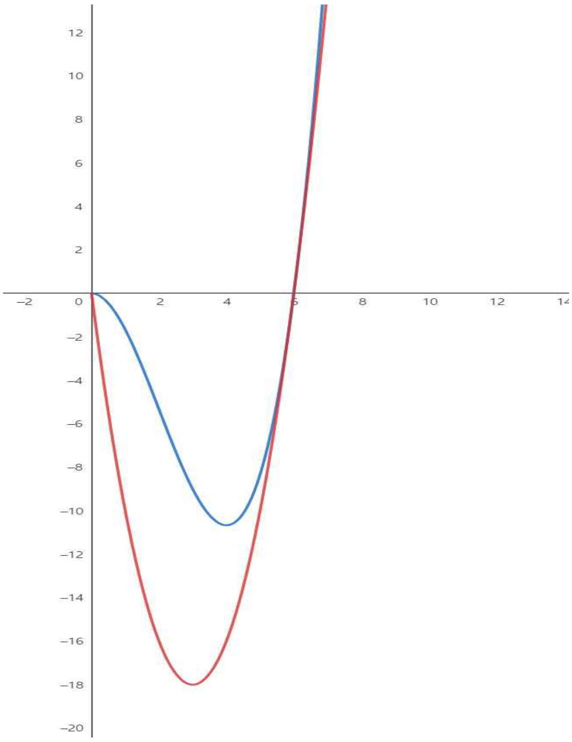
$$\sum_{k=1}^{5}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$$
$$=a-a-4a+4a-4a=-4a=40$$

10. 두 함수 $f(x)=x(x-4)$, $g(x)=a(x-3)$에 대하여 부등식 $\int_0^x f(t)dt \geq \int_0^x g(t)dt$가 모든 양의 실수 x에 대하여 항상 성립하도록 하는 실수 a의 값을 구하시오.

$\int_0^6 f(t)dt=\int_0^6 g(t)dt=0$ 이므로

$f(6)=g(6)$

$6\times 2=a\times 3,\ a=4$



11. 다항함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $f(x)$와 $F(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 등식을 만족시킨다.

$$x^2 f(x)+F(x)=\int(6x^2-2x-2)dx$$

함수 $F(x)$가 원점을 지날 때 함수 $x\times F(x)$ 극댓값과 극솟값의 차는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$2xf(x)+x^2f'(x)+f(x)=6x^2-2x-2$

$f(x)=2x-2$

$F(x)=x^2-2x$

$xF(x)=x^3-2x^2$

$M=0,\ m=-\frac{32}{27},\ M-m=\frac{32}{27}$

$p+q=59$

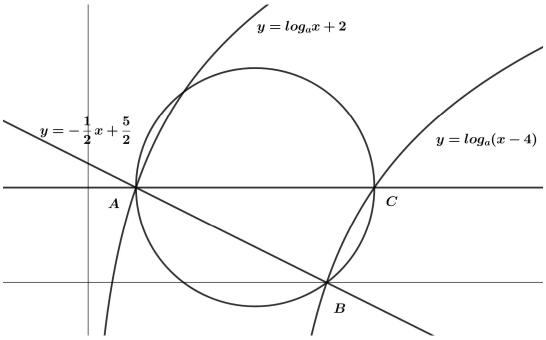
12. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{9}|a_n|$의 값을 구하시오.

(가) $a_n \times a_{n+1} < 0$
(나) $|a_{n+1}| = |a_n| + 2$ 이다.
(다) $\sum_{n=1}^{9} a_n = 12$

$a_1 = 4,\ a_2 = -6,\ a_3 = 8, \cdot\cdot\cdot$

$\sum_{n=1}^{9}|a_n| = \frac{9(4+20)}{2} = 108$

13. 직선 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$가 두 함수 $y = \log_a x + 2,\ y = \log_a(x-4)\,(a>1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_a(x-4)$과 만나는 점을 C라 할 때, 세 점 A, B, C는 선분 AC를 지름으로 하는 원 위에 있을 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하자. $a^2 \times S$의 값을 구하시오.



곡선 $y = \log_a(x-4)$은 곡선 $y = \log_a x + 2$을 x축의 방향으로 4만큼 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 그래프이고 $B(5, 0)$이다.

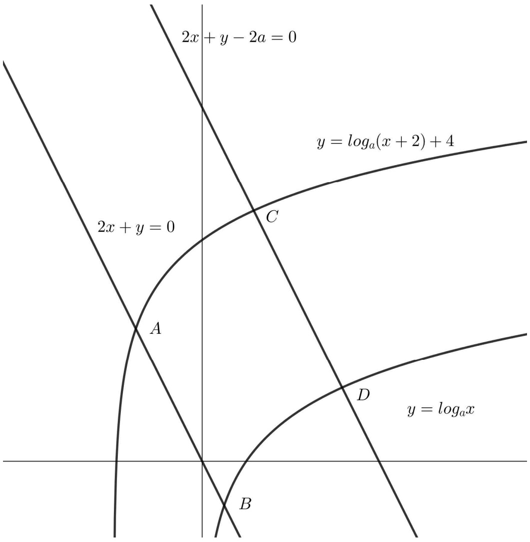
점 $B(5, 0)$를 x축의 방향으로 -4만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 점은 $(1, 2)$이고 $(1, 2)$는 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$위의 점이므로 $A(1, 2)$이다. 직선 AB와 직선 BC는 수직이므로 직선 BC의 기울기는 2이고 점 C의 y좌표는 2이므로

$C(6, 2),\ \log_a 2 = 2,\ a^2 = 2$

$\frac{1}{2} \times (6-1) \times 2 = 5$

$a^2 \times S = 10$

14. $1<a$ 인 실수 a에 대하여 그림과 같이 직선 $2x+y=0$과 두 곡선 $y=\log_a(x+2)+4$, $y=\log_a x$이 만나는 점을 각각 A, B라 하고 직선 $2x+y-2a=0$ 과 두 곡선 $y=\log_a(x+2)+4$, $y=\log_a x$이 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 두 선분 AB, CD와 두 곡선 $y=\log_a(x+2)+4$, $y=\log_a x$으로 둘러 싸인 부분의 넓이를 $f(a)$이라 하자. 자연수 n에 대하여 $f(a)\ge n+10$을 만족시키는 자연수 a의 최솟값을 a_n이라할 때, $\sum_{n=1}^{22} a_n$의 값을 구하시오.



$\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$

두 직선 $2x+y=0$, $2x+y-2a=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{2a}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

$$\frac{2a}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2a}{\sqrt{5}}$$

$$f(a)=2\sqrt{5}\times\frac{2a}{\sqrt{5}}=4a$$

$a_1=3$, $a_2=3$, $a_3=a_4=a_5=a_6=4$,
$a_7=a_8=a_9=a_{10}=5$

$$\sum_{n=1}^{22} a_n=3\times2+4\times(4+5+6+7+8)$$
$$=126$$

15. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{15} b_{2k-1}$의 값을 구하시오.

(가) $6S_n=(a_n+4)(a_n-1)$ (나) $12T_n=(b_n+3)^2$ (다) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\times b_n<0$

$6a_1=a_1^2+3a_1-4$, $(a_1-4)(a_1+1)=0$

$a_1=4$ or -1

$6a_n=a_n^2+3a_n-(a_{n-1}^2+3a_{n-1})$
$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})-3(a_n+a_{n-1})=0$
$a_n=-a_{n-1}$ or $a_n-a_{n-1}=3$

$12b_1=(b_1+3)^2$, $b_1=3$

$b_n=\frac{1}{12}(b_n+3)^2-\frac{1}{12}(b_{n-1}+3)^2$
$(b_n-3)^2-(b_{n-1}+3)^2$
$=(b_n+b_{n-1})(b_n-b_{n-1}-6)=0$
$b_n=-b_{n-1}$ or $b_n=b_{n-1}+6$

$a_1\times b_1<0$, $a_1=-1$

$a_2=1$ or 2, $b_2=-3$

$b_3=3$, $a_3=-1$ or -2

$a_4=1$ or 2, $b_4=-3$

$b_5=3$, $a_5=$ -1 or -2

$\therefore\ b_{2k}=-3$, $b_{2k-1}=3$

$\sum_{k-1}^{15} b_{2k-1}=45$