1. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_9 = 3a_3$일 때, a_5의 값을 구하시오.

$a_9 - a_3 = 2a_3,\ a_3 = 3d,\ a_1 = d = 2$

$a_5 = 5d = 10$

2. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = a_3 + 8$, $2a_4 - 3a_6 = 3$일 때, $a_k < 0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

$a_3 - a_1 = 2d = -8,\ d = -4$
$2a_4 - 3a_6 = -2(a_6 - a_4) - a_6$
$= -4d - a_6 = 16 - a_6 = 3$
$a_6 = 13$ 이므로 $a_9 = 1 > 0,\ a_{10} = -3 < 0$

3. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 = -15$, $|a_3| - a_4 = 0$일 때, a_7의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

$-(-15+2d) = -15+3d$
$d = 6$
$a_7 = -15+36 = 21$

4. 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3a_7 = 64,\ a_8 > 0$일 때, a_2의 값을 구하시오.

$a_3a_7 = (a_7+12)a_7 = 64$

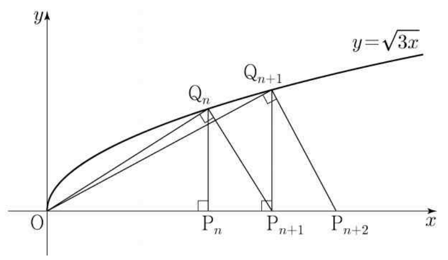
$a_7 = 4\ (\because a_8 > 0)$

$a_2 = a_7 - 5d = 19$

5. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 P_n과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

- 선분 OP_n과 선분 P_nQ_n이 서로 수직이다.
- 선분 OQ_n과 선분 Q_nP_{n+1}이 서로 수직이다.

다음은 점 P_1의 좌표가 $(1, 0)$일 때, 삼각형 $OP_{n+1}Q_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(a_n, 0)$이라 하자.
$\overline{\mathrm{OP}_{n+1}}=\overline{\mathrm{OP}_n}+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$과 삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} : \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$

이고, 점 Q_n의 좌표는 $(a_n, \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\boxed{(가)}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times\left(\boxed{(나)}\right)\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

$\overline{P_nP_{n+1}}=3,\ a_n=3n-2$

$\therefore$ 나 $=3n+1$

6. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$이 서로 다른 두 실근 $\alpha, \beta(\alpha<\beta)$를 갖고, 세 수 $1, \alpha, \beta$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, n의 값을 구하시오.

$x^2-nx+4(n-4)=(x-n+4)(x-4)$

$\alpha=4,\ \beta=n-4=7,\ \therefore n=11$

$\alpha=n-4,\ \beta=4$ 이면 n은 자연수가 아니므로 문제의 조건에 맞지 않는다.

7. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_5+a_9=45$ 일 때, a_1+a_{10}의 값을 구하시오.

$a_1+a_5+a_9=45$ 에서
$a_5=15,\ a_1+a_9=30$ 이므로
$a_1+a_{10}=a_1+a_9+d$
$=30+2=32$

8. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은?

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $|a_6|=|a_7|+3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

$a_6+a_8=0$ 에서 $a_7=0,\ a_6<0,\ a_8>0$
$|a_6|=|a_7|+3=3,\ a_6=-3$
$\therefore\ a_2=a_6-4d=-15$

9. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=10,\ a_3+a_4+a_5=45$ 가 성립할 때, a_{10}의 값은?

$a_1+a_2=10,\ a_3+a_4+a_5=45$ 에서
$a_4=15,\ a_3=11$ 이므로 $d=4$
$\therefore\ a_{10}=a_4+6d=39$

10. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_5+a_{13}=3a_9$, $\sum_{k=1}^{18}a_k=\frac{9}{2}$를 만족시킬 때, a_{13}의 값은?

① 2 ② 1 ③ 0 ④ -1 ⑤ -2

$a_9=0,\ \sum_{k=1}^{18}a_k=a_{18}=\frac{9}{2}$
$d=\frac{1}{2},\ a_{13}=2$

11. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 이차방정식 $x^2-14x+24=0$의 두 근이 a_3, a_8이다. $\sum_{k=3}^{8} a_k$의 값을 구하시오.

$$\sum_{n=3}^{8} a_n = \frac{6(a_3+a_8)}{2} = 3\times 14 = 42$$

12. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4-a_2=4$일 때, $\sum_{k=11}^{20} a_k$의 값을 구하시오.

$a_4-a_2=2d=4$, $d=2$

$$\sum_{k=11}^{20} a_k = \frac{10(a_{11}+a_{20})}{2} = \frac{10(22+40)}{2} = 310$$

13. 첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오.

$\frac{n\{-6-6+(n-1)\times 2\}}{2}=30$ 이므로

$n=10$

14. 공차가 d_1, d_2인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자. $S_n T_n = n^2(n^2-1)$일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $T_n = 2n(n-1)$

$b_n = T_n - T_{n-1} = 4n-4$

ㄴ.

$S_n = \dfrac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}$

$T_n = \dfrac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$

$\therefore d_1 d_2 = 4$

ㄷ. 반례) $S_n = n(n+1)$ 이면 $a_n = 2n$

15. 첫째항이 6이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\dfrac{a_8-a_6}{S_8-S_6}=2$ 가 성립한다. d의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

$\dfrac{a_8-a_6}{S_8-S_6} = \dfrac{2d}{a_8+a_7} = \dfrac{2d}{12+13d} = 2$

$\therefore d = -1$

16. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=6,\ a_{10}=-12$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdot\cdot\cdot+|a_{20}|$의 값은?

① 280 ② 284 ③ 288
④ 292 ⑤ 296

$a_{10}-a_1=9d=-18,\ d=-2$

$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$

$=6+4+2+0+2+4+\cdot\cdot\cdot+28$

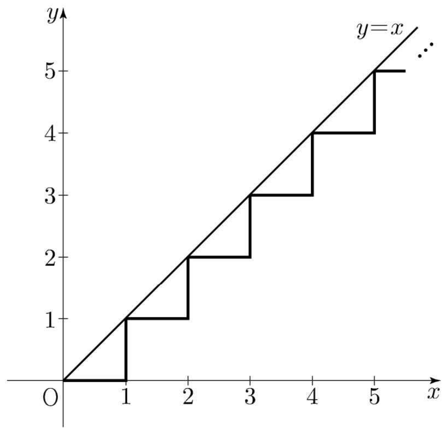
$=12+\dfrac{16(2+32)}{2}=284$

17. 좌표평면에서 그림과 같이 길이가 1인 선분이 수직으로 만나도록 연결된 경로가 있다. 이 경로를 따라 원점에서 멀어지도록 움직이는 점 P의 위치를 나타내는 점 A_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

(i) A_0은 원점이다.

(ii) n이 자연수일 때, A_n은 점 A_{n-1}에서 점 P가 경로를 따라 $\dfrac{2n-1}{25}$만큼 이동한 위치에 있는 점이다.

예를 들어, 점 A_2와 A_6의 좌표는 각각 $\left(\dfrac{4}{25},\ 0\right),\ \left(1,\ \dfrac{11}{25}\right)$이다. 자연수 n에 대하여 점 A_n 중 직선 $y=x$위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때, 두 번째 점의 x좌표를 a라 하자. a의 값을 구하시오.



$\dfrac{n^2}{25}=2x,$

$n=5\sqrt{2x},\ x=2k^2$

$\therefore a=8$

18. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

$a_n = (n-1)d$ 에서

$a_{n+1} = nd$, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{n(n-1)d}{2}$

$a_{n+1}b_n = nd \times b_n = \dfrac{n(n-1)d}{2}$

$\therefore\ b_n = \dfrac{n-1}{2}$, $b_{27} = 13$

19. 첫째항이 50이고 공차가 -4인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 m의 값을 구하시오.

$a_{13} = 2$, $a_{14} = -2$

$S_{11} < S_{12} < S_{13} > S_{14} > S_{15}$ 이고

$S_{12} = S_{14}$, $S_{11} = S_{15}$ 이므로

$\sum_{k=m}^{m+4} S_k$ 는 $m = 11$일 때, 최대가 된다.

20. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2 = 1$일 때, a_8의 값을 구하시오.

$S_7 = S_1 - 9$, $S_8 = S_2 + 6$ 이므로

$a_8 = S_8 - S_7 = 15 + (S_2 - S_1) = 15 + a_2 = 16$

21. 수열 a_n에 대하여 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n이라 하자. (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3$$
$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$$
$$(n = 2,\ 3,\ 4, \cdots)$$

일 때, a_{20}의 값은?

① 39 ② 43 ③ 47 ④ 51 ⑤ 55

$(a_{n+1} + a_n)^2 = 4a_n a_{n+1} + 4$

$(a_{n+1} - a_n)^2 = 4$

$a_{n+1} - a_2 = 2$ 이므로 $d = 2$

$a_{20} = a_2 + 18d = 39$

22. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$일 때, a_{47}의 값을 구하시오.

$a_{47} = S_{47} - S_{46} = (47^2 - 46^2) + (47 - 46)$
$= 94$

23. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 3n$일 때, a_{100}의 값을 구하시오.

$a_{100} = S_{100} - S_{99}$
$= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) = 196$

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 10n$일 때, $a_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$a_n = S_n - S_{n-1}$
$= \{n^2 - (n-1)^2\} - 10\{n - (n-1)\}$
$= 2n - 11 \quad (a_1 = S_1,\ n \geq 1)$
$n < \frac{11}{2}$

25. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = 2n^2 - 3n$ 일 때, a_{10} 의 값을 구하시오.

$a_{10} = S_{10} - S_9 = 2(10^2 - 9^2) - 3(10 - 9)$
$= 35$

26. 등차수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 3n^2 + n$을 만족시킬 때, a_8의 값을 구하시오.

$a_1 = 4,\ a_1 + a_3 = 14$ 에서

$a_3 = 10,\ a_3 - a_1 = 2d = 6$ 이므로 $d = 3$

$a_8 = a_3 + 5d = 25$

27. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k = -16,\ S_{k+2} = -12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오.

$a_{k+2} + a_{k+1} = 4,\ a_{k+1} = 1$

$a_k = -1,\ -1 + (-3) + (-5) + (-7) = -16$

$k = 4,\ a_8 = -1 + 8 = 7$

28. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_5 \times a_7 < 0$

(나) $\sum_{k=1}^{6} |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^{6} |a_{2k}|$ 이다.

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$a_5 < 0,\ a_7 > 0$

$a_7 + a_8 + \cdots + a_{12}$
$= 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12}$

$a_7 + a_9 + a_{11} + a_2 + a_4 = 6 + |a_6|$

$5a_6 + 3 = |a_6|,\ a_6 = -\frac{1}{2}$

$\therefore a_{10} = \frac{23}{2}$

29. 첫째 항이 m, 공차가 1인 등차수열의 첫째 항부터 제 n항까지의 합이 50일 때, $m+n$의 값은? (단, $m \leq 10$인 자연수)

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

$\dfrac{n(2m+n-1)}{2}=50$ 이므로

$n=5,\ m=8$

30. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합을 구하시오.

(가) $|a_m|=|a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$a_m + a_{m+3} = 0$

$-90+(m-1)d+(m+2)d=0$

$d=\dfrac{90}{2m+1}$
$m=1,\ d=30$
$m=2, d=18$
$m=4, d=10$
$m=7, d=6$
$m=22, d=2$

$d=10,\ 6,\ 2$일 때, 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 문제의 조건에 해당하는 d의 값의 합은 48

31. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째 항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오.

$a_7 = 13k$ (k는 자연수)

$$\sum_{k=1}^{7} S_7 = 7a_1 + 6a_2 + 5a_3 + 4a_4 + 3a_5 + 2a_6 + a_7$$
$$= 7(a_7 - 6d) + 6(a_7 - 5d) + \cdot\cdot\cdot + a_7$$
$$= 28a_7 - 112d = 644$$

$$k = \frac{644 + 112d}{28 \times 13} = \frac{23 + 4d}{13},\ k = 3,\ d = 4$$

$$a_2 = a_7 - 5d = 39 - 20 = 19$$