제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times 3^{-\frac{7}{4}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

$3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{9}$

2. 함수 $f(x) = 2x^3 + 4x + 5$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 6x^2 + 4,\ f'(1) = 10$

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_1 = 2, \quad a_2 a_4 = 36$$

일 때, $\frac{a_7}{a_3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

$\frac{a_7}{a_3} = r^4$

$2r \times 2r^3 = 36,\ r^4 = 9$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & (x \le -1) \\ x^2 - 5x - a & (x > -1) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$-2 + a = 1 + 5 - a,\ a = 4$

5. 함수 $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$의 극댓값과 극솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f(-2)+f(1)=15$

6. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=4$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{2(1-\cos^2\theta)}{\cos^2\theta}=4$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

7. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=-4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{k+1}-a_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{1}{n}$$

을 만족시킨다. a_{13}의 값은? [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

$\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}$

$-\frac{1}{4}-\frac{1}{a_{13}}=\frac{1}{12}$, $a_{13}=-3$

8. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$

$b=-1,\ a=2$

$f(x)=x(x-1)(2x-1)$

$f(2)=6$

9. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.) [4점]

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

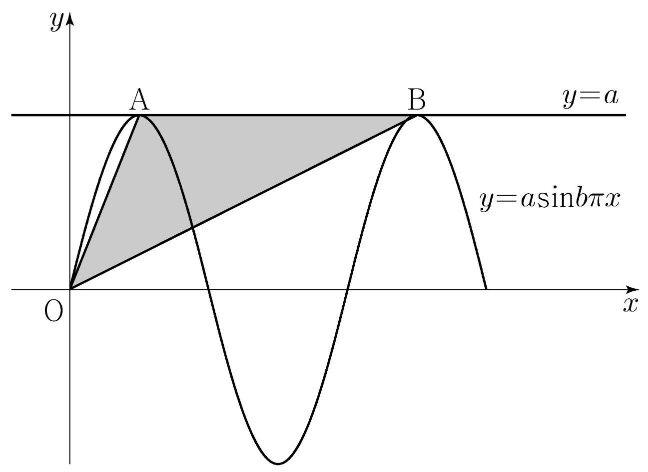
$a(t)=-12t+24t$

$k=1$

$-\int_3^4(-4t^3+12t^2)dt=27$

10. 두 양수 a, b에 대하여 곡선 $y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le \frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자. 삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$A\left(\frac{1}{2b},\ a\right),\ B\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{b}\times a=5,\ 2ab\times\frac{2ab}{5}=\frac{5}{4}$

$b=\frac{1}{2},\ a=\frac{5}{2},\ a+b=3$

11. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a+f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f(1)=2+4a$

$\int_1^0 f(t)dt=-3a$

$\therefore\ a=-2$

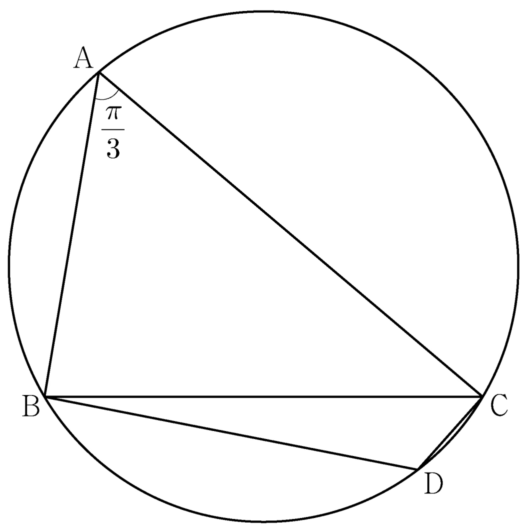
$f(x)+xf'(x)=6x^2-4x+f(x)$

$f'(x)=6x-4,\ f(x)=3x^2-4x-5$

$f(3)=27-12-5=10$

12. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle \mathrm{BCD})=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}$의 값은? [4점]

① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$



$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7},\ \overline{BD}=8$

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{7},\ \overline{BC}=2\sqrt{21}$

$\overline{CD}=x$

$(2\sqrt{21})^2=x^2+64-2\times8\times x\times\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$x=2$

13. 첫째항이 -45이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 자연수 d의 값의 합은? [4점]

> (가) $|a_m| = |a_{m+3}|$인 자연수 m이 존재한다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k > -100$이다.

① 44 ② 48 ③ 52 ④ 56 ⑤ 60

$a_m + a_{m+3} = 0$

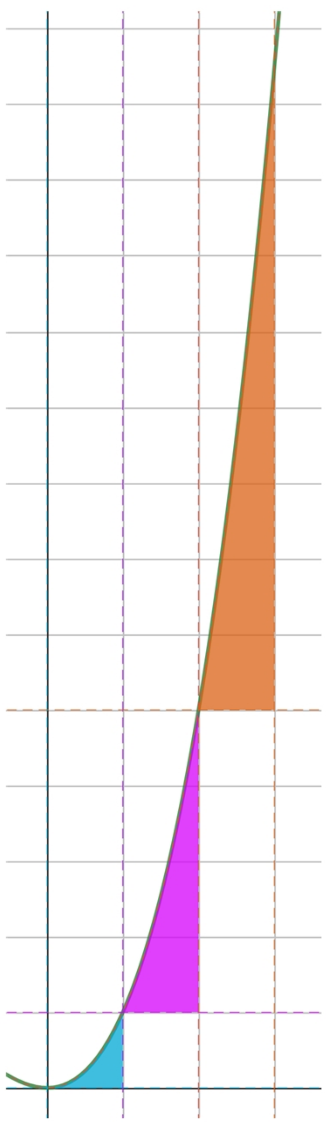
$-90 + (m-1)d + (m+2)d = 0$

$d = \dfrac{90}{2m+1}$

$m = 1,\ d = 30$
$m = 2,\ d = 18$
$m = 4,\ d = 10$
$m = 7,\ d = 6$
$m = 22,\ d = 2$

$d = 10,\ 6,\ 2$일 때, 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 문제의 조건에 해당하는 d의 값의 합은 48

ㄷ. 참



14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(0) = f'(2) = 0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(0) & (x \le 0) \\ f(x+p) - f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

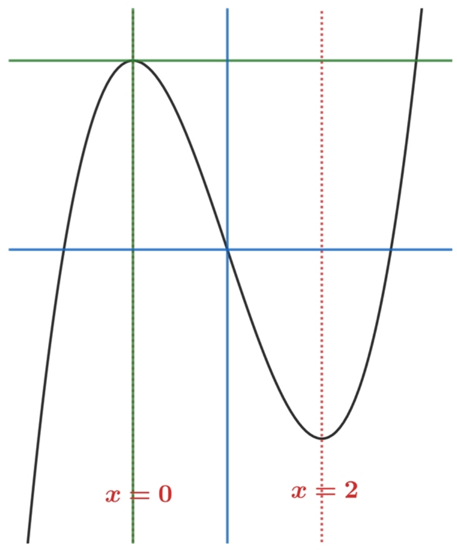
> <보 기>
>
> ㄱ. $p = 1$일 때, $g'(1) = 0$이다.
>
> ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.
>
> ㄷ. $p \ge 2$일 때, $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx \ge 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

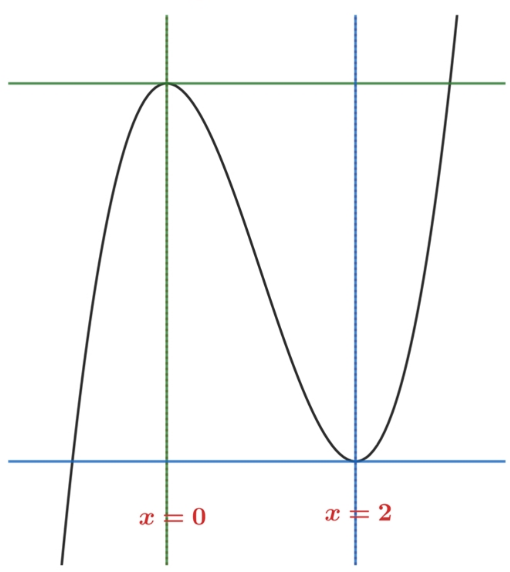
ㄱ. $p = 1$ **이면**

$g(x) = \begin{cases} f(x) - f(x) & (x \le 0) \\ f(x+1) - f(1) & (x > 0) \end{cases}$ **이므로**

$g'(1) = 0$



ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 $p = 2$ 하나 뿐이다. 참



15. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \le 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \le a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \le 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

$-1 \le a_5 < -\frac{1}{2}$

$a_6 = -2a_5 - 2$, $a_5 + a_6 = -a_5 - 2 = 0$, $a_5 = -2$
는 가정에 모순

$-\frac{1}{2} \le a_5 \le \frac{1}{2}$

$a_6 = 2a_5$, $a_5 + a_6 = 3a_5 = 0$, $a_5 = 0$

$\frac{1}{2} < a_5 \le 1$

$a_6 = -2a_5 + 2$, $a_5 + a_6 = -a_5 + 2 = 0$, $a_5 = 2$
는 가정에 모순

$a_5 = 0$, $a_4 = -1$ or 0 or 1
$a_4 = -1$ **이면** $a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$**이므로**
문제의 조건에 맞지 않는다.

$a_4 = 0$, $a_3 = 0, 1$($a_3 = -1$ **이면** $\sum_{k=1}^{5} a_k < 0$)

$a_3 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$

$a_3 = 0$, $a_2 = 1$, $a_1 = \frac{1}{2}$

$a_3 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$

$a_4 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$ or $\frac{3}{4}$,
$a_1 = \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}$

$\frac{1}{2} + 1 + 1 + 2 = \frac{9}{2}$

단답형

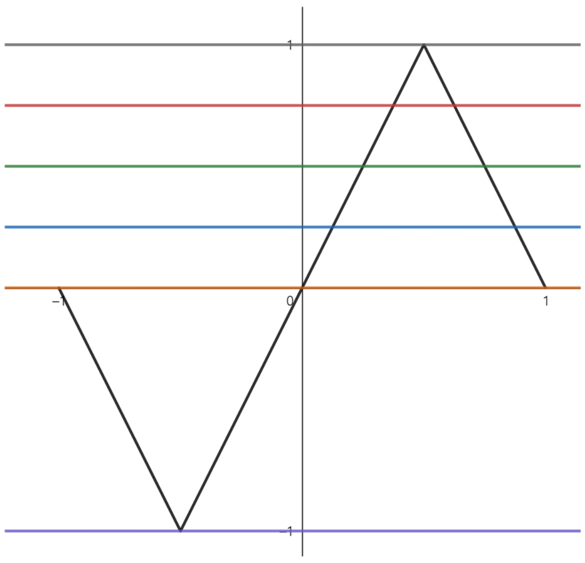
16. $\log_2 100 - 2\log_2 5$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 \frac{100}{25} = 2$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 12x^2 + 7$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 7x + 3$, $f(1) = 8$

다음과 같은 함수의 그래프를 이용해서 풀 수도 있다.



18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=45,\quad \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10}b_k=14$

$\sum_{k=1}^{10}\left(b_k-\frac{1}{2}\right)=14-5=9$

19. 함수 $f(x)=x^3-6x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율과 $f'(a)$의 값이 같게 되도록 하는 $0<a<4$인 모든 실수 a의 값의 곱은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=-3=3a^2-12a+5$

$3a^2-12a+8=0$

$\frac{8}{3}$, 11

20. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

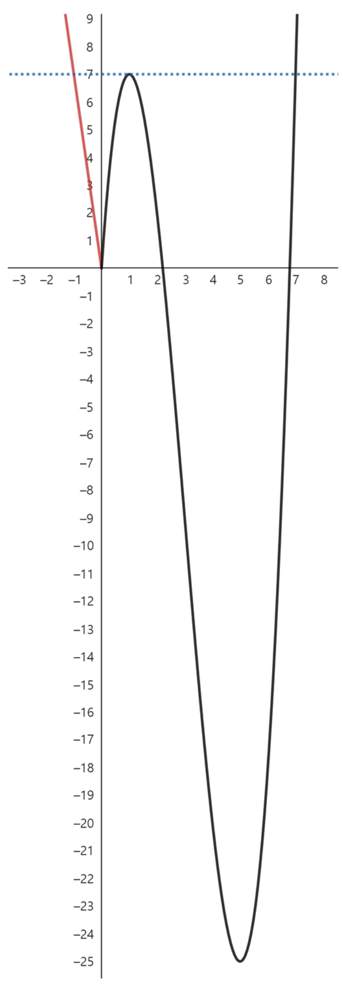
$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x$ **이므로**

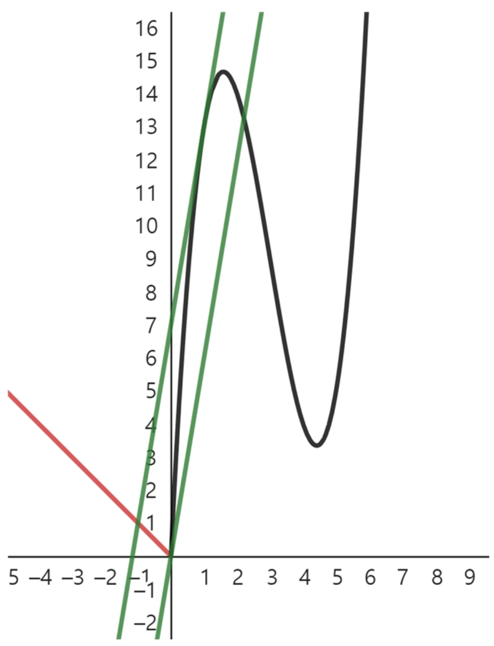
$=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$

$f(x)+|f(x)+x|-6x$
$=\begin{cases}-7x & (x<0)\\ 2f(x)-5x & (x\geq 0)\end{cases}$

$2f(x)-5x=x^3-9x^2+15x$**는** $x=1$ **에서 극댓값** 7 $x=5$**에서 극솟값** -25**를 가지므로 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 정수** k**는** $0<k<7$

$\frac{6(1+6)}{2}=21$

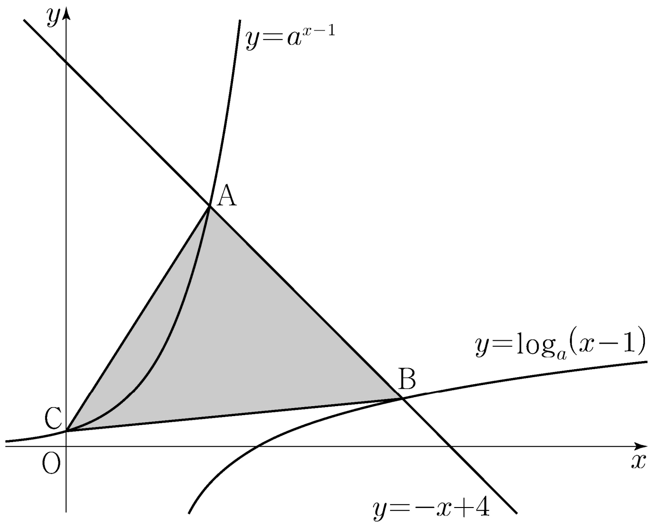




21. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



$y=a^{x-1}$과 $y=\log_a(x-1)$은 $y=x-1$에 대하여 대칭이므로

두 점 A, B의 중점의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로 $A\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right), B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$a^{\frac{1}{2}}=\frac{5}{2},\ a=\frac{25}{4},\ C\left(0, \frac{4}{25}\right),\ h=\dfrac{\left|4-\frac{4}{25}\right|}{\sqrt{2}}$

$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{96}{25\sqrt{2}}=\frac{96}{25},\quad 50S=192$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f(x-3)\times\lim_{h\to 0+}\frac{|f(x+h)|-|f(x-h)|}{h}$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

(나) 방정식 $g(x)=0$은 서로 다른 네 실근 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$를 갖고 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=7$이다.

$f(\alpha)=0,\ f'(\alpha)\neq 0$ 일 때,

$$g(x)=\begin{cases} f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

or

$$g(x)=\begin{cases} f(x-3)\times\{2f'(x)\} & (x<\alpha) \\ f(x-3)\times\{-2f'(x)\} & (x>\alpha)\end{cases}$$

이므로 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 네 실근을 갖기 위해서는 $f(\alpha-3)=0,\ f'(\alpha-3)=0$ 이어야 한다.

방정식 $g(x)=0$의 해는 $\alpha-3,\ \alpha-1,\ \alpha,\ \alpha+3$ 이므로

$\alpha=2$

$f(x)=(x+1)^2(x-2)$

$\therefore\ f(5)=108$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(60, \frac{1}{4}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

$E(X) = 60 \times \frac{1}{4} = 15$

24. 네 개의 수 1, 3, 5, 7 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 a라 하고, 네 개의 수 2, 4, 6, 8 중에서 임의로 선택한 한 개의 수를 b라 하자. $a \times b > 31$일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

$\frac{3}{4^2} = \frac{3}{16}$

19

25. $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같을 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$${}_5C_1a^4 = {}_5C_2a^3$$

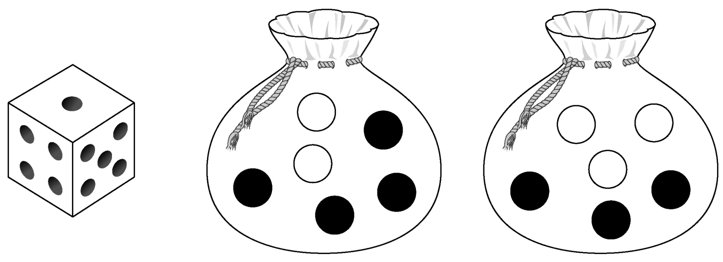
$$a = 2$$

26. 주머니 A에는 흰 공 2개, 검은 공 4개가 들어 있고, 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다.

이 시행을 한 번 하여 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 흰색일 때, 나온 눈의 수가 5 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{3}{14}$ ③ $\frac{2}{7}$ ④ $\frac{5}{14}$ ⑤ $\frac{3}{7}$



$$\frac{\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}}{\frac{1}{3}\times\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}+\frac{2}{3}\times\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}}$$

$$=\frac{1}{7}$$

8

27. 지역 A에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 X, 지역 B에 살고 있는 성인들의 1인 하루 물 사용량을 확률변수 Y라 하자. 두 확률변수 X, Y는 정규분포를 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 두 확률변수 X, Y의 평균은 각각 220과 240이다.
> (나) 확률변수 Y의 표준편차는 확률변수 X의 표준편차의 1.5배이다.

지역 A에 살고 있는 성인 중 임의추출한 n명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{X}$, 지역 B에 살고 있는 성인 중 임의추출한 $9n$명의 1인 하루 물 사용량의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하자. $\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = 0.1587$일 때, $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 물 사용량의 단위는 L이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6915 ② 0.7745 ③ 0.8185 ④ 0.8413 ⑤ 0.9772

$X : N(220, \sigma^2)$, $Y : N(240, (1.5\sigma)^2)$

$\overline{X} : N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$, $\overline{Y} : N\left(240, \left(\frac{1.5\sigma}{\sqrt{9n}}\right)^2\right)$

$P(\overline{X} \le 215) = P\left(Z \le \frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587$

$\frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = -1$, $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$

$P(\overline{Y} \ge 235) = P\left(Z \ge \frac{235-240}{\frac{1.5\sigma}{3\sqrt{n}}}\right)$

$= P(Z \ge -2) = 0.5 + 0.4772 = 0.9772$

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(3) + f(4)$는 5의 배수이다.
> (나) $f(1) < f(3)$이고 $f(2) < f(3)$이다.
> (다) $f(4) < f(5)$이고 $f(4) < f(6)$이다.

① 384 ② 394 ③ 404 ④ 414 ⑤ 424

$f(3) \ge 2$, $f(4) \le 5$

$f(3) = 2$, $f(4) = 3$

$3^2 = 9$

$f(3) = 3$, $f(4) = 2$

$2^2 \times 4^2 = 64$

$f(3) = 4$, $f(4) = 1$

$3^2 \times 5^2 = 225$

$f(3) = 5$, $f(4) = 5$

$4^2 = 16$

$f(3) = 6$, $f(4) = 4$

$5^2 \times 2^2 = 100$

$9 + 64 + 225 + 16 + 100 = 414$

단답형

29. 두 이산확률변수 X, Y의 확률분포를 표로 나타내면 각각 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	c	b	a	1

Y	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(Y=y)$	$a+\frac{1}{20}$	b	$c-\frac{1}{10}$	b	$a+\frac{1}{20}$	1

$\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$일 때, $10\times\mathrm{V}(Y)$의 값을 구하시오. [4점]

$E(X)=5,$

$E(X^2)=25+\frac{31}{5}$
$=82a+58b+25c$

$E(Y)=5$
$E(Y^2)=82a+58b+25c+\frac{1}{20}-\frac{5}{2}+\frac{81}{20}$
$=25+\frac{39}{5}$

$V(Y)=\frac{39}{5}$

$10\times V(Y)=78$

30. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. [4점]

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

모두 짝수 개의 사인펜을 받는 경우
$2(a+1)+2(b+1)+2(c+1)+2(d+1)=14$

${}_4H_3=20$

두 명은 짝수 개, 두 명은 홀수 개의 사인펜을 받는 경우

$2(a+1)+2(b+1)+2c+1+2d+1=14$

${}_4C_2\times{}_4H_4=6\times35=210$

$10,\ 2,\ 1,\ 1$**로 받는 경우는 제외**
$\frac{4!}{2!}=12$

$210+20-12=218$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$ 의 값은? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{3^n}}{1+\frac{2^{n+1}}{3^n}}=6$$

24. $2\cos\alpha=3\sin\alpha$ 이고 $\tan(\alpha+\beta)=1$ 일 때, $\tan\beta$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

$$\tan\alpha=\frac{2}{3},\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1,\ \tan\beta=\frac{1}{5}$$

25. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

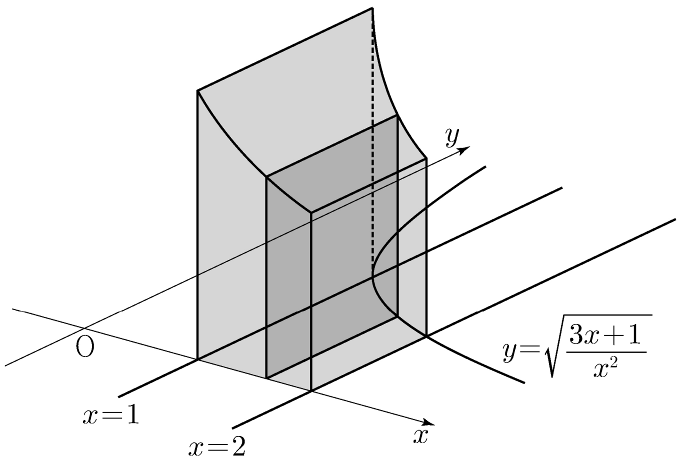
$$x=e^{t}-4e^{-t},\quad y=t+1$$

에서 $t=\ln 2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{3}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{1}{5}$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{c^{t}+4c^{-t}},\quad \frac{1}{2+4\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\frac{3x+1}{x^{2}}}$ $(x>0)$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]

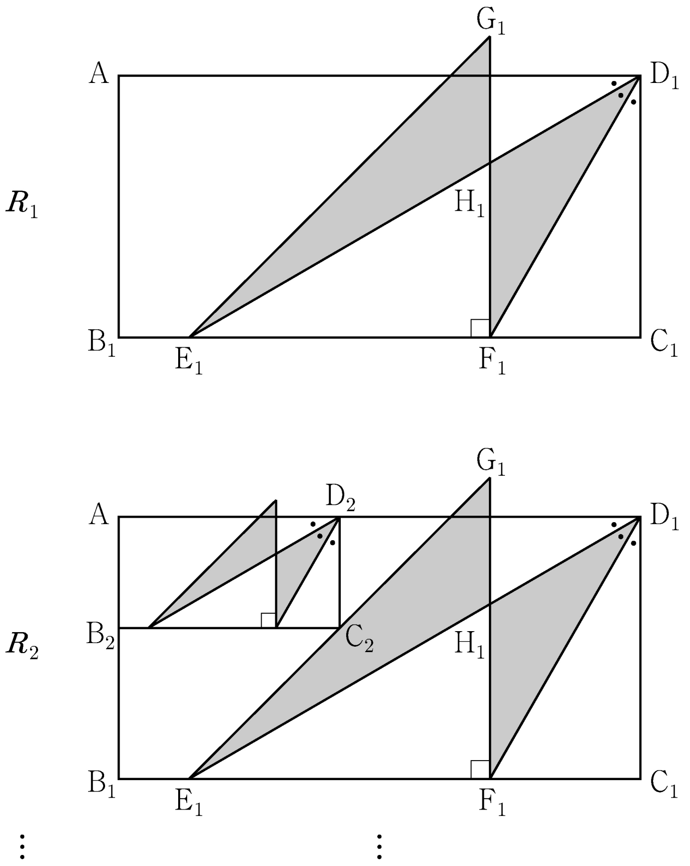


① $3\ln 2$　② $\frac{1}{2}+3\ln 2$　③ $1+3\ln 2$

④ $\frac{1}{2}+4\ln 2$　⑤ $1+4\ln 2$

$$\int_{1}^{2}\frac{3x+1}{x^{2}}dx$$
$$=\left[3\ln|x|-\frac{1}{x}\right]_{1}^{2}=3\ln 2+\frac{1}{2}$$

27. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. $\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자. $\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 ◿◸ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 ◿◸ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

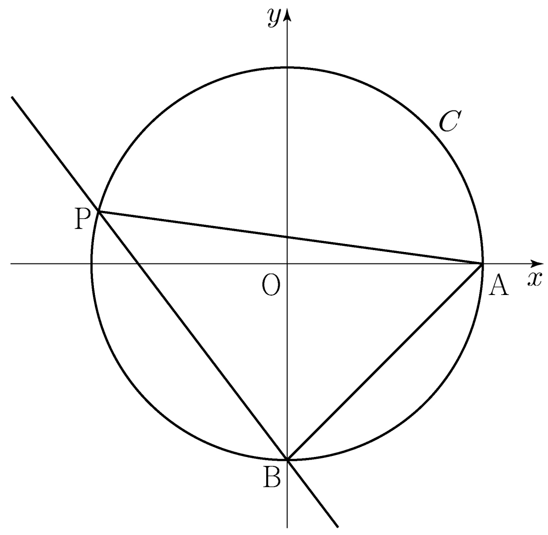
길이비 $1:\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ 넓이비 $1:\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6-\sqrt{3}}{9}$

$\dfrac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{6-\sqrt{3}}{3(2\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

28. 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 C와 두 점 A(2, 0), B(0, −2)가 있다. 원 C 위에 있고 x좌표가 음수인 점 P에 대하여 $\angle PAB=\theta$라 하자. 점 Q(0, $2\cos\theta$)에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 R라 하고, 두 점 P와 R 사이의 거리를 $f(\theta)$라 할 때, $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} f(\theta)\,d\theta$의 값은? [4점]

① $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$ ② $\sqrt{3}-1$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-3}{2}$
④ $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}-3}{2}$



$\angle QBP=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\frac{\overline{PB}}{\sin\theta}=4$, $\overline{PB}=4\sin\theta$

$\overline{BR}=(2+2\cos\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2\sin\theta+\sin2\theta$

$f(\theta)=2\sin\theta-\sin2\theta$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(2\sin\theta-\sin2\theta)d\theta$

$=\left[-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$

단답형

29. 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\{f(x)+2\}e^{f(x)}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(a)=6$인 a에 대하여 $g(x)$는 $x=a$에서 최댓값을 갖는다.
>
> (나) $g(x)$는 $x=b$, $x=b+6$에서 최솟값을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 할 때, $(\alpha-\beta)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 실수이다.) [4점]

$g'(x)=f'(x)\{f(x)+3\}e^{f(x)}$ 이므로

$a=b+3$, $f(b)=f(b+6)=-3$

$f(b+3)=6$

$f(x)=k(x-b)(x-b-6)-3$

$f(b+3)=k(3)(-3)-3=6$, $k=-1$

$f(x)=-(x-b)(x-b-6)-3$

$\alpha+\beta=2b+6$, $\alpha\beta=b^2+6b+3$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4b^2+24b+36-4b^2-24b-12=24$

30. 최고차항의 계수가 9인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin(\pi\times f(x))}{x}=0$
>
> (나) $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 곱은 5이다.

함수 $g(x)$는 $0\le x<1$일 때 $g(x)=f(x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $g(x+1)=g(x)$이다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $\int_0^5 xg(x)\,dx=\dfrac{q}{p}$이다.

$p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$h(x)=\sin(\pi\times f(x))$

$h(0)=0$, $h'(0)=0$

$f(0)$은 정수, $h'(x)=\cos(\pi\times f(x))\times\pi\times f'(x)$, $f'(0)=0$

$f(0)=f(1)$

$f(x)=9x^2(x-1)+f(0)$

$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{4}{3}+f(0)$

$f(0)\times\left\{-\dfrac{4}{3}+f(0)\right\}=5$

$f(0)=3$

$f(x)=9x^2(x-1)+3$

$\int_0^5 xg(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^5 xg(x)dx$

$\int_1^5 xg(x)dx=\int_0^4(t+1)g(t+1)dt=\int_0^4(t+1)g(t)dt$

$=\int_0^4 tg(t)dt+\int_0^4 g(t)dt=\int_0^1 tg(t)dt+\int_1^4 tg(t)dt+4\int_0^1 f(t)dt$

$\int_1^4 tg(t)dt=\int_0^3(t+1)g(t+1)dt=\int_0^3(t+1)g(t)dt$

$=\int_0^3 tg(t)dt+\int_0^3 g(t)dt=\int_0^1 tg(t)dt+\int_1^3 tg(t)dt+3\int_0^1 f(t)dt$

• • •

$\int_0^5 xg(x)dx=5\int_0^1 xf(x)dx+10\int_0^1 f(x)dx$

$=5\left[\dfrac{9}{5}-\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{2}\right]+10\left[\dfrac{9}{4}-3+3\right]=\dfrac{111}{4}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(3,\ 0,\ -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(0,\ 4,\ 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

25. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a} = (3, 0), \quad \vec{b} = (1, 2), \quad \vec{c} = (4, 2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

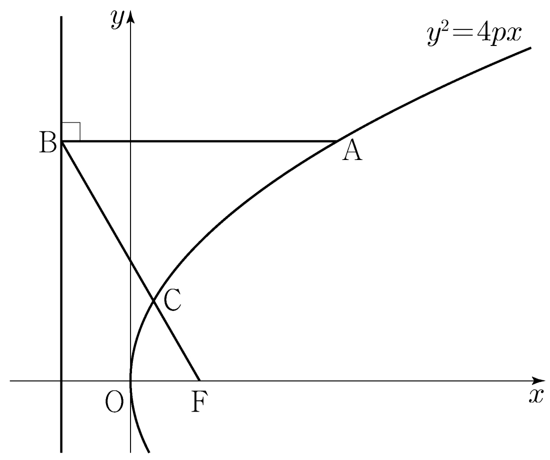
$$\vec{p} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}, \quad |\vec{q} - \vec{c}| = 1$$

을 만족시킬 때, $|\vec{p} - \vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

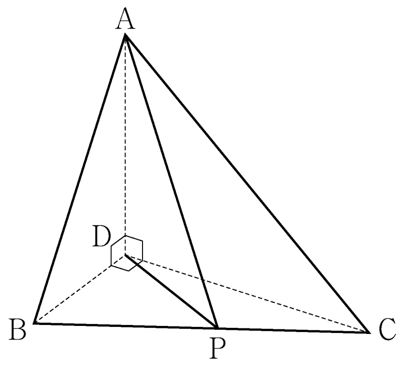
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BF}}$이고 $\overline{\mathrm{BC}} + 3\overline{\mathrm{CF}} = 6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

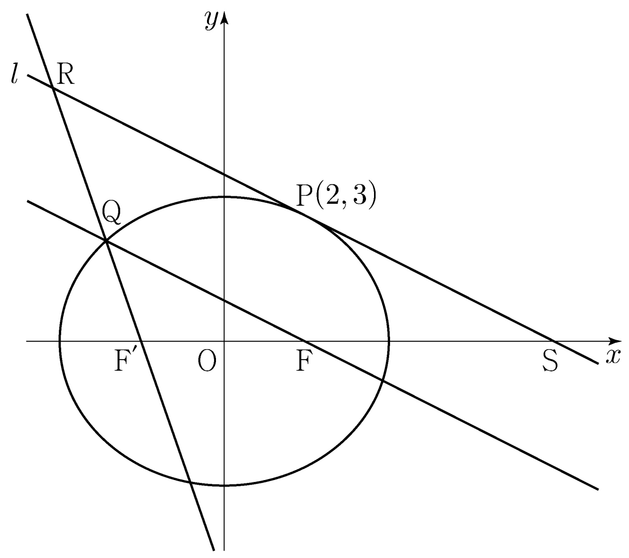


27. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AD}}=3$, $\overline{\mathrm{DB}}=2$, $\overline{\mathrm{DC}}=2\sqrt{3}$ 이고 $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{BDC}=\dfrac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다. 선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{DP}}$ 의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

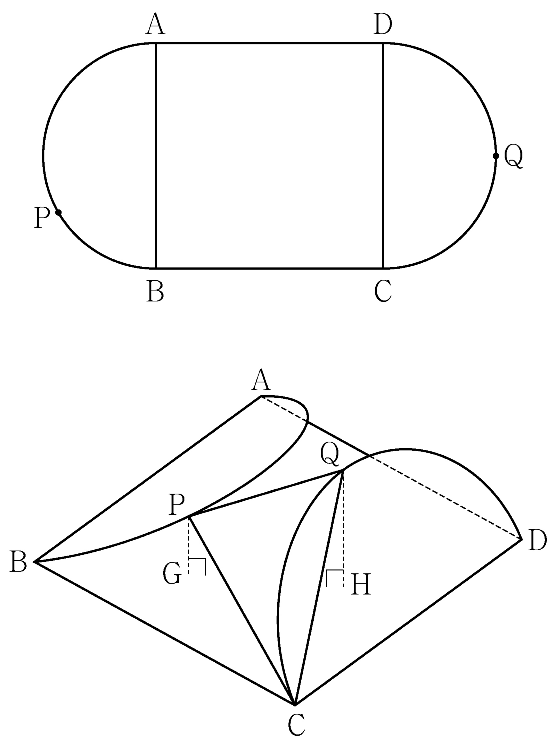
28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.
두 직선 $\mathrm{F}'\mathrm{Q}$와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF'의 둘레의 길이는? [4점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



30. 좌표평면에서 세 점 A$(-3, 1)$, B$(0, 2)$, C$(1, 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=2,\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.
선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\ge 1$일 때, $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.