수학 영역

제 2 교시

홀수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$\left(2^{2-\sqrt{2}}\right)^{2+\sqrt{2}}=2^{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$$
$$=2^2=4$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{2}{x^2}}+3}{1+\dfrac{5}{x}}=4$$

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30,\quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

$$\frac{a_4+a_6}{a_2+a_4}=r^2=\frac{1}{4},\ r=\frac{1}{2}$$

$$a_1(r+r^3)=\frac{5}{8}a_1=30$$

$$a_1=48$$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$$

$$g'(2)=4+12=16$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

5. $\tan\theta<0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$f'(x)=6x^2-18x+a$$
$$=6(x-1)(x-2)$$
$$a=12,\ b=2$$

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$a_k=a_1k$$

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a_1}}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(4-\sqrt{15})\}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{a_1}}=2$$

$$a_1=\frac{9}{4},\ a_4=9$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{5}{2}$

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$4-f(t)=-tf'(t)$

$t(3t^2-1)-(t^3-t+2)+4=0$

$2t^3+2=0,\ t=-1$

$(-1, 2),\ f'(-1)=2$

$y=2x+4,\ (-2, 0)$

9. 함수

$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

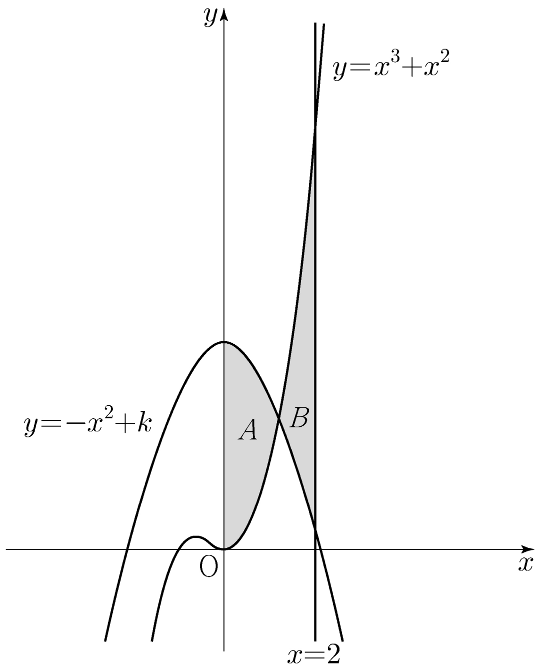
$\left[-\frac{\pi}{3}, 2b\right]$

$a-\sqrt{3}\tan 2b \le f(x) \le a+3$

$a=4,\ b=\frac{\pi}{12}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



$$\int_0^2 (x^3+x^2)dx = \int_0^2 (k-x^2)dx$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left[kx-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2$$

$4+\frac{8}{3}=2k-\frac{8}{3}$

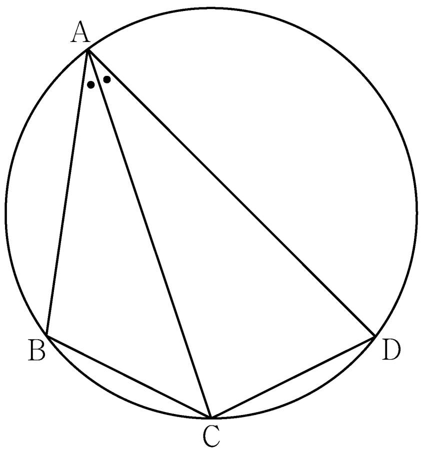
$k=\frac{14}{3}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ ④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$\overline{BC}=\overline{CD}=x$

$\cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{5^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times5\times3\sqrt{5}}=\frac{7^2+(3\sqrt{5})^2-x^2}{2\times7\times3\sqrt{5}}$

$x=\sqrt{10}, \cos\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}}, \sin\left(\frac{\angle A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{50}=2R,\ R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1\le x<n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

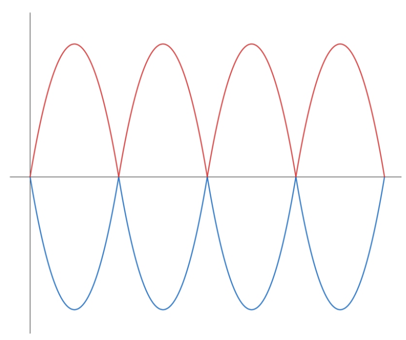
열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

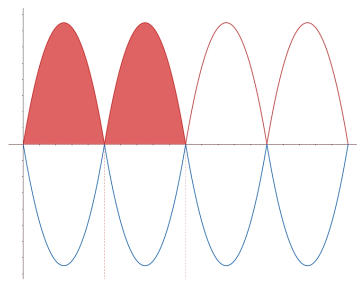
① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

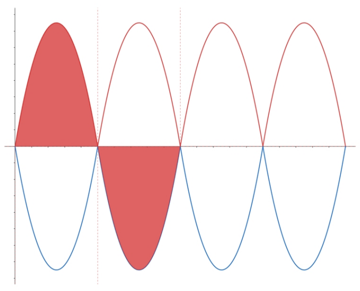
$\int_{n-1}^{n}|f(x)|\,dx=\frac{6}{6}(1)^3=1$



$g(2)=0$ 이므로 $\int_0^2 f(t)dt=\int_2^4 f(t)dt$

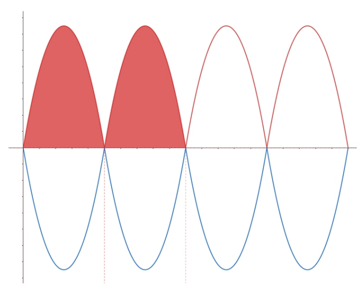
$g(x)\ge 0$ 이므로
$f(x)=-6x(x-1)\ (0\le x<1)$





$f(x)=-6(x-1)(x-2)\ (1\le x<2)$ 이라 하면 $g(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(x)=6(x-1)(x-2)\ (1\le x<2)$



$f(x)=6(x-2)(x-3)\ (2\le x<3)$ 이라 하면
$g(x)$의 최솟값은 $x=3$ 에서 -2이다.

$x\to0$일 때, $g(x)$의 값은 감소하고 $g(x)$는 열린구간 $(0, 4)$에서 정의되었으므로 최솟값은 존재하지 않는다.

$\therefore\ f(x)=-6(x-2)(x-3)\ (2\le x<3)$
$f(x)=6(x-3)(x-4)\ (3\le x<4)$

$\int_{\frac{1}{2}}^{4}f(x)dx=-\frac{1}{2}$

13. 자연수 $m(m \ge 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

$m=2,3,5,6,7$일 때, $m^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 5

$m=4$, $4^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$m=8$, $8^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 8

$m=9$, $9^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되도록하는 n의 개수는 7

$$\sum_{m=2}^{9} f(m)=5\times5+7\times2+8=47$$

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\begin{cases} x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \end{cases}$$

함수 $h(x)=\lim_{t\to0+} g(x+t)\times\lim_{t\to2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1)=3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,1]$에서 감소하고 $g(-1)=-2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $h(1)=\lim_{t\to0+} g(1+t)\times\lim_{t\to2+} g(1+t)$
$=1\times3=3$

ㄴ. $h(-1)=\lim_{t\to0+} g(-1+t)\times\lim_{t\to2+} g(-1+t)$ 에서
$\lim_{t\to0+} g(-1+t)$의 값을 알 수 없다.

ㄷ. ㄱ 에 의해 $h(1)=3$이지만 $\lim_{x\to1-} h(x)=3f(1)<h(1)=3$
이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다.

#9 최대 · 최소의 정리

◈ 최대 • 최소의 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

a_6 이 3의 배수인 경우
$a_6=120$, $a_8=160$, $a_9=200$

a_5가 3의 배수인 경우
$a_6=\frac{1}{3}a_5$, $a_5=30$, $a_6=10$, $a_8=50$, $a_9=90$

a_4가 3의 배수인 경우
$a_5=\frac{1}{3}a_4$, $a_6=\frac{4}{3}a_4$, $a_7=\frac{5}{3}a_4=40$, $a_4=24$, $a_5=8$, $a_6=32$
$a_8=72$, $a_9=24$

a_3이 3의 배수인 경우
$a_4=\frac{1}{3}a_3$, $a_5=\frac{4}{3}a_3$, $a_6=\frac{5}{3}a_3$, $a_7=3a_3=40$이므로
a_3은 자연수가 아니다.

a_2가 3의 배수인 경우 $a_3=\frac{1}{3}a_2$, $a_4=\frac{4}{3}a_2$, $a_5=\frac{5}{3}a_2$, $a_6=3a_2$ 이므로
a_6이 3의 배수가 아니라는 가정에 모순이다.

$\therefore a_9=200$ or 90 or 24

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x>2$

$3x+2=4(x-2)$

$x=10$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^4-x^2+3$, $f(2)=15$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

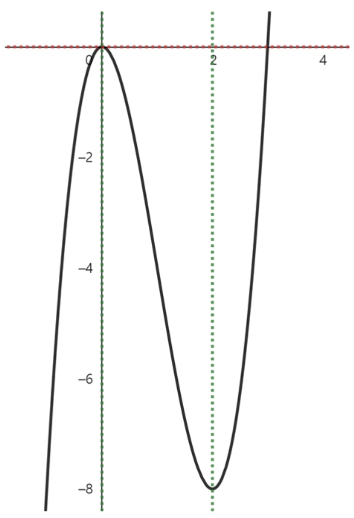
$$\sum_{k=1}^{5}a_k=10, \sum_{k=1}^{5}b_k=22$$

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$-8 < -k < 0$

$0 < k < 8$

7



20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.

(나) $t \geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

$2 \leq t,\ v(t)=3t^2+4t-20$

$-\int_0^2(2t^3-8t)dt+\int_2^3(3t^2+4t-20)dt$

$=-\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2+\left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$

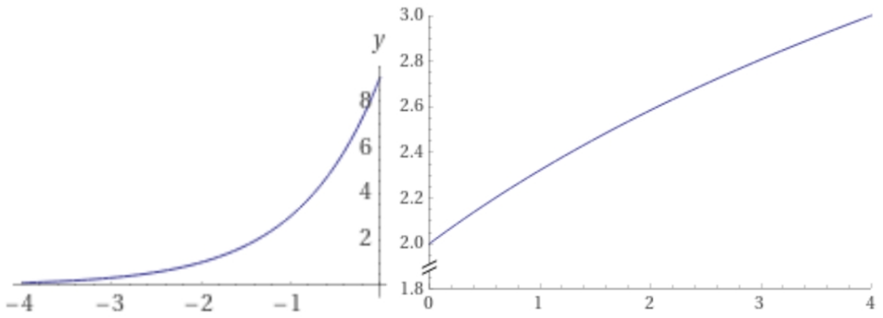
$=17$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x\ge 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]



$2<n<9$일 때. $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수의 최댓값이 4가 되므로

$\dfrac{6(3+8)}{2}=33$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

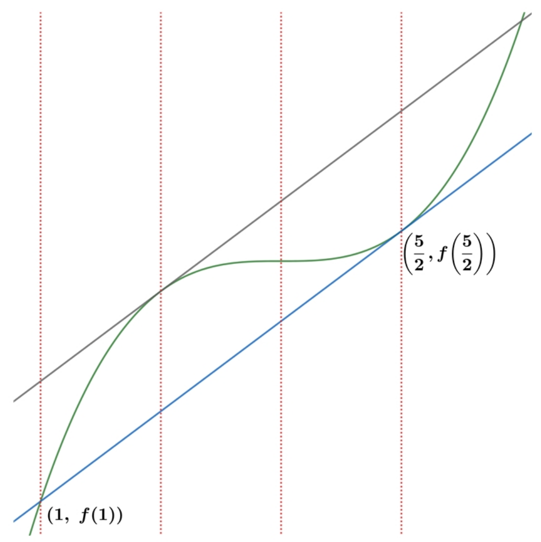
(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\dfrac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$$

$$f(x)-(ax+b)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2$$



$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$$

$f'(1)=f'(g(1))$

$$f'(x)=a+\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)$$
$$=3x^2-12x+\frac{45}{4}+a$$

$$\frac{1+g(1)}{2}=\frac{-12}{-6}=2,\ g(1)=3$$

$f(3)=6$

$f(0)=-3$ **이므로** $b=\dfrac{13}{4}$

$f(3)=6$ **이므로**

$a=\dfrac{3}{4}$

기)했는지 확인

$$f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$$

ㅕ오니, 자신이

$f(4)=13$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

$_5C_3 \times 3^2 = 90$

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

$2 \times 5^2 \times 3 = 150$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

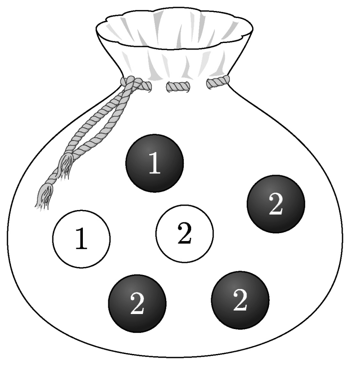
25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

$$1-\frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3}=\frac{10}{13}$$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$



$$P(A)=\frac{{}_2C_1\times{}_4C_2}{{}_6C_3}=\frac{12}{20}$$

$$P(B)=\frac{{}_4C_3}{{}_6C_3}=\frac{4}{20}$$

$$P(A\cap B)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{20}$$

$$P(A\cup B)=\frac{13}{20}$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

$$755.9 - 746.1 = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

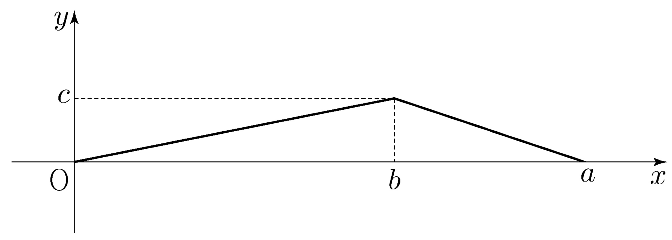
$$\sigma = 10$$

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \le 6$$

$$73.96 \le n$$

74

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

$$\frac{1}{2}ac = 1$$

$$P(X \le b) + P(X \ge b) = 1$$

$$P(X \le b) - P(X \ge b) = \frac{1}{4}$$

$$P(X \le b) = \frac{5}{8},\ \frac{1}{2}bc = \frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{c}{b}\sqrt{5} = \frac{1}{2}$$

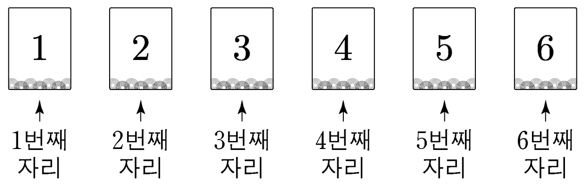
$$a = 4,\ b = \frac{5}{2},\ c = \frac{1}{2}$$

$$a + b + c = 7$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$$\frac{3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2}{{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

$$=\frac{13}{36}$$

49

30. 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x)\le f(x+1)$이다.
(나) $1\le x\le 5$일 때 $f(x)\le x$이고, $6\le x\le 10$일 때 $f(x)\ge x$이다.
(다) $f(6)=f(5)+6$

$f(1)=1,\ f(10)=10$

$f(5)=1,\ f(6)=7$

$f(2)=f(3)=f(4)=1$

$7\le f(7)\le f(8)\le f(9)$

(7, 8, 9), (7, 8, 10), (7, 9, 9), (7, 9, 10), (7, 10, 10)
(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10), (8, 10, 10)
(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10)
(10, 10, 10)

14

$f(5)=2,\ f(6)=8$

$1\le f(2)=f(3)=f(4)\le 2$
(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 2)

$8\le f(7)\le f(8)\le f(9)$

(8, 8, 9), (8, 8, 10), (8, 9, 9), (8, 9, 10), (8, 10, 10)
(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10)
(10, 10, 10)

$4\times 9=36$

$f(5)=3,\ f(6)=9$

$1\le f(2)=f(3)=f(4)\le 3$
(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3),(1, 2, 2),(1, 2, 3), (1, 3, 3)
(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 3, 3)

$9\le f(7)\le f(8)\le f(9)$

(9, 9, 9), (9, 9, 10), (9, 10, 10)
(10, 10, 10)

$9\times 4=36$

$f(5)=4,\ f(6)=10$

$1\le f(2)=f(3)=f(4)\le 4$
(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4),
(1, 2, 2),(1, 2, 3),(1, 2, 4),
(1, 3, 3), (1, 3, 4)
(2, 2, 2), (2, 2, 3), (2, 2, 4)
(2, 3, 3), (2, 3, 4)

$10\le f(7)\le f(8)\le f(9)$

(10, 10, 10)

$14\times 1=14$

$14+36+36+14=100$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x} = 4$$

24. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

$$\int_0^1 \sqrt{1+3x}\,dx$$

$$1+3x=t,\ dx=\frac{1}{3}dt$$

$$\frac{1}{3}\int_1^4 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{14}{9}$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

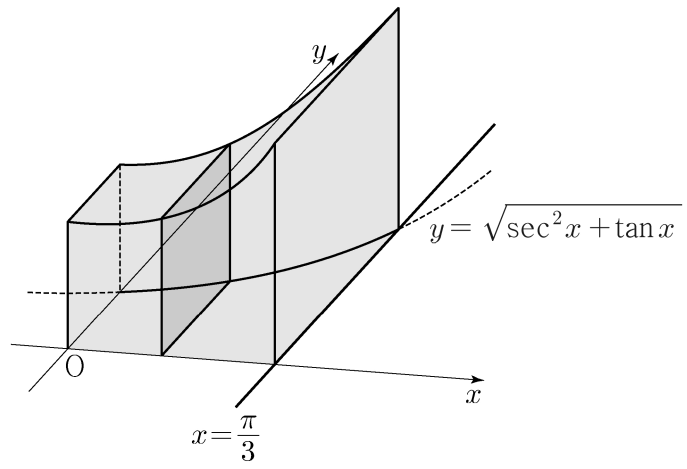
25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}+\frac{1}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}=3$$

$$a_n=\frac{3}{2}\times 4^n,\ a_2=24$$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$

④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x+\tan x)dx$$

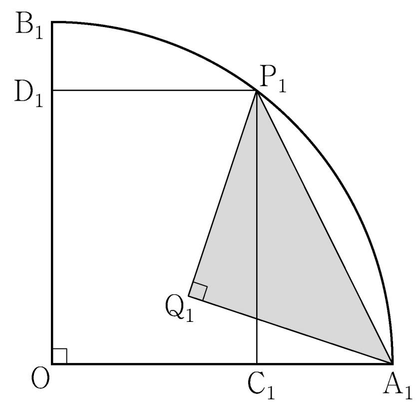
$$=\left[\tan x-\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\sqrt{3}+\ln 2$$

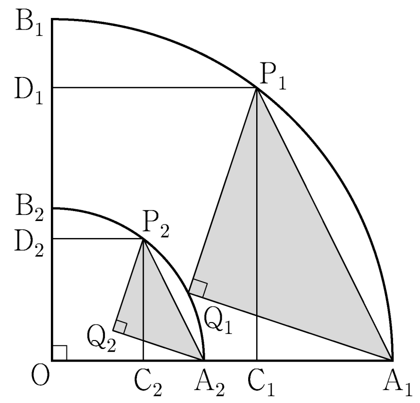
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1}:\overline{OD_1}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1}=\overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1}=\overline{OA_2}=\overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

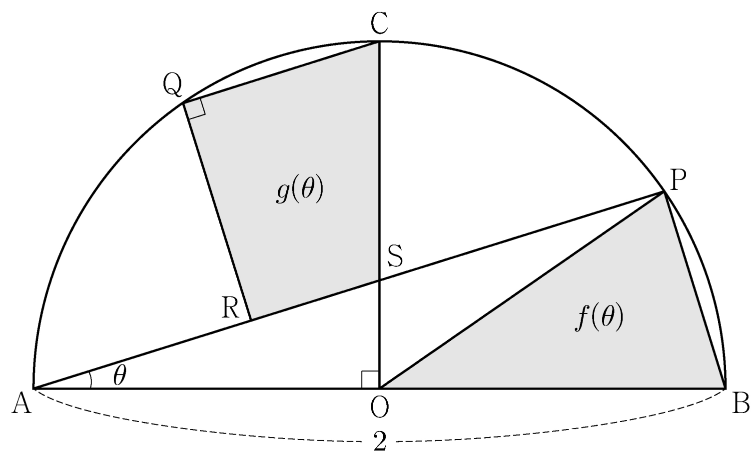
선분 A_1P_1의 중점을 H라 하면 세 점 O, Q_1, H은 일직선상에 있다.

$\angle P_1OA_1=2\theta$라 하면 $\cos 2\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\overline{A_1P_1}=2\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\overline{OQ_1}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC=\frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다. 호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB}=\overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. 선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB=\theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta$

$\overline{PB}=\overline{CQ}$ 이므로 $\angle OCQ=\frac{\pi}{2}-\theta=\angle CSP$이고

평행선의 엇각의 성질에 의하여

$\overline{CQ}$ 와 $\overline{AP}$는 평행하다. 그러므로 $\angle QRS=\frac{\pi}{2}$

$\overline{PB}=\overline{CQ}=2\sin\theta$
$\overline{OS}=\tan\theta$, $\overline{CS}=1-\tan\theta$
$\overline{RS}=2\sin\theta-(1-\tan\theta)\sin\theta$
$\overline{QR}=(1-\tan\theta)\cos\theta$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\{4\sin\theta-(1-\tan\theta)\sin\theta\}(1-\tan\theta)\cos\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(3-2\tan\theta-\tan^2\theta)$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin\theta\cos\theta(2\tan\theta+\tan^2\theta)}{\theta^2}=2$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
>
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때,

$\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}e^{x}=0$ 이므로 $c=-6$, $b=1$

$f(\ln 2)=0$이므로 $a=1$

$f(\ln 4)=14$ 이므로

$\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)dx=14\ln 4-\int_{\ln 2}^{\ln 4}f(x)dx$

$=28\ln 2-\left[\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}-6x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=34\ln 2-8$

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
>
> (나) 열린구간 $(0,\,3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\frac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$h(0)=e^{\sin f(0)\pi}-1=0$이므로 $f(0)$은 정수이다.

$h'(x)=e^{\sin\pi f(x)}\times(\cos\pi f(x))f'(x)$ 에서
$h'(0)=\cos(\pi f(0))f'(0)$
$\cos(\pi f(0))$의 값은
1 또는 -1 이므로 $f'(0)=0$ 이고
$f'(3)=0$ 이므로 $f(0)$은 2의 배수이다.

$f(x)=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)^{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{27a+1}{2}$는 2의 배수이다.

열린구간 $(0,\,3)$에서 $f(x)$는 감소함수이고

$\frac{1}{2}<f(x)<\frac{27a+1}{2}$이고

방정식 $h(1)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 7이려면

$\frac{27a+1}{2}=8$, $a=\frac{5}{9}$이다.

$f(x)=\frac{5}{9}\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-3)^{2}+\frac{1}{2}$

$f(2)=\frac{22}{9}$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a,\ 2)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의

기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는?

(단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\ (t\text{는 실수})$$

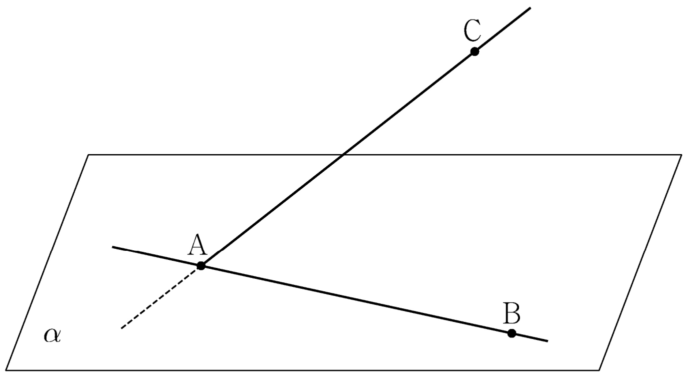
를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$

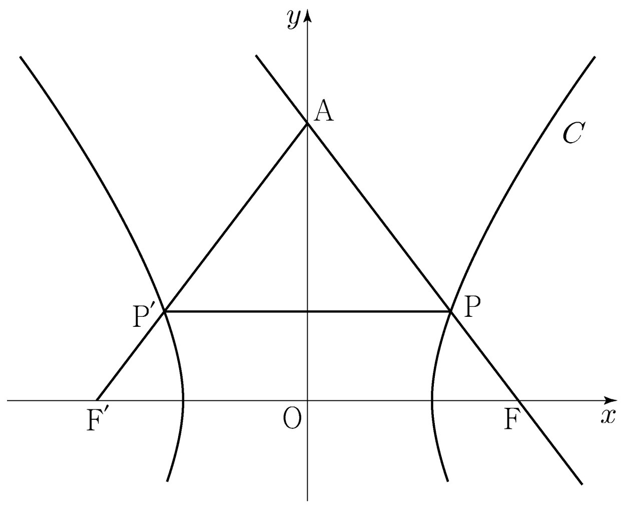


28. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)\,(c > 0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{AP} : \overline{PP'} = 5 : 6, \quad \overline{PF} = 1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$



이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

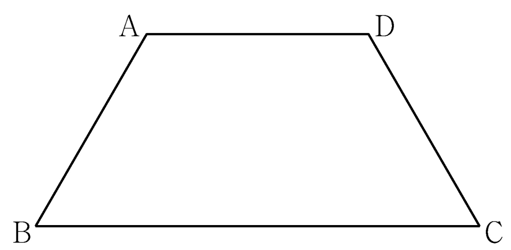
단답형

29. 평면 α 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}$의 값을 구하시오. [4점]

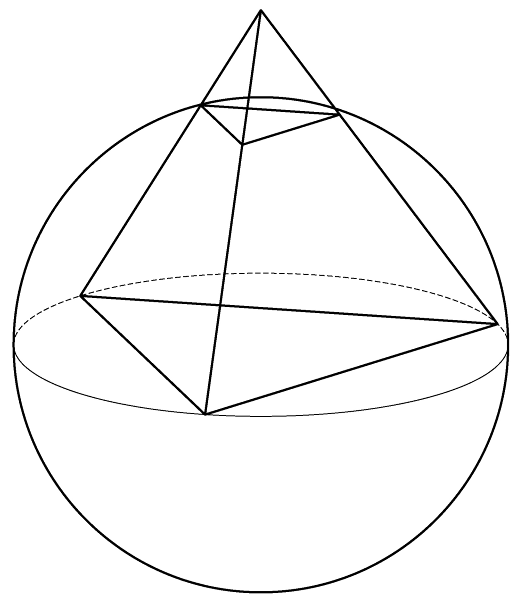
(가) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\left(\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=6$

(다) $2\times\angle\mathrm{BQA}=\angle\mathrm{PBQ}<\dfrac{\pi}{2}$



30. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고,
점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\left(\dfrac{4}{2^{\sqrt{2}}}\right)^{2+\sqrt{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-2}+3x}{x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_2+a_4=30, \quad a_4+a_6=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, a_1의 값은? [3점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 72 ⑤ 80

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=x^2f(x)$$

라 하자. $f(2)=1$, $f'(2)=3$일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

5. $\tan\theta<0$이고 $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+5$는 $x=1$에서 극대이고, $x=b$에서 극소이다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

7. 모든 항이 양수이고 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}=2$$

를 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

8. 점 $(0, 4)$에서 곡선 $y=x^3-x+2$에 그은 접선의 x절편은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

9. 함수

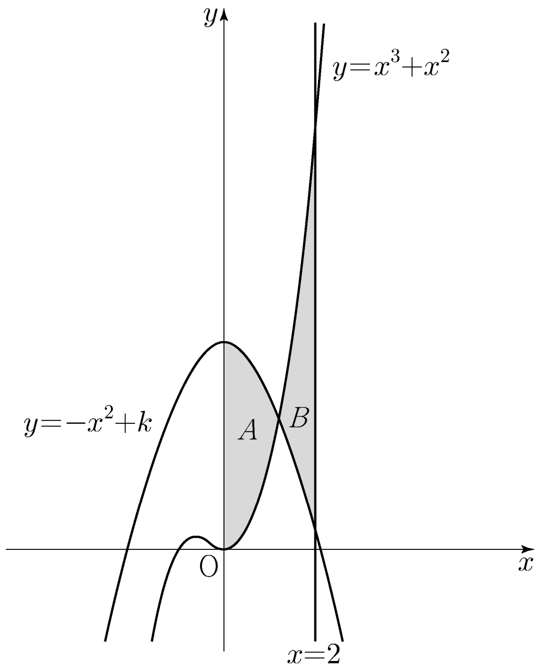
$$f(x)=a-\sqrt{3}\tan 2x$$

가 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{6}, b\right]$에서 최댓값 7, 최솟값 3을 가질 때, $a\times b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{5\pi}{12}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{6}$

10. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

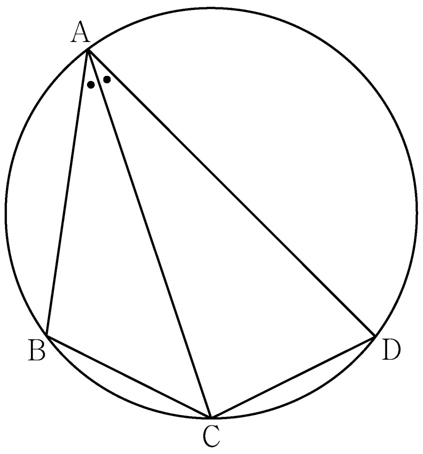


이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

11. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$$\overline{\mathrm{AB}}=5,\ \overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{5},\ \overline{\mathrm{AD}}=7,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}$$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는? [4점]



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$　④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때, $|f(x)|=|6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0, 4)$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt-\int_x^4 f(t)\,dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$의 값은? [4점]

① $\frac{5}{2}$　② $\frac{3}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $-\frac{1}{2}$　⑤ $-\frac{3}{2}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

13. 자연수 $m\,(m \geq 2)$에 대하여 m^{12}의 n제곱근 중에서 정수가 존재하도록 하는 2 이상의 자연수 n의 개수를 $f(m)$이라 할 때, $\sum_{m=2}^{9} f(m)$의 값은? [4점]

① 37 ② 42 ③ 47 ④ 52 ⑤ 57

14. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x) = \begin{cases} x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ f(x) & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $h(x) = \lim_{t \to 0+} g(x+t) \times \lim_{t \to 2+} g(x+t)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $h(1) = 3$

ㄴ. 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 감소하고 $g(-1) = -2$이면 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 최솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

15. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7=40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

단답형

16. 방정식

$$\log_2(3x+2)=2+\log_2(x-2)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=4x^3-2x$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(3a_k+5)=55,\quad \sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=32$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}b_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 방정식 $2x^3-6x^2+k=0$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 2가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점]

20. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0\leq t\leq 2$일 때, $v(t)=2t^3-8t$이다.
(나) $t\geq 2$일 때, $a(t)=6t+4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [4점]

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

21. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \left|3^{x+2}-n\right| & (x<0) \\ \left|\log_2(x+4)-n\right| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.

(나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.

(다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

짝수형

5지선다형

23. 다항식 $(x^3+3)^5$의 전개식에서 x^9의 계수는? [2점]

① 30 ② 60 ③ 90 ④ 120 ⑤ 150

24. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수 중 4000 이상인 홀수의 개수는? [3점]

① 125 ② 150 ③ 175 ④ 200 ⑤ 225

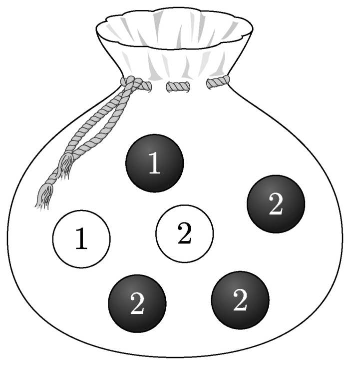
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 흰색 마스크 5개, 검은색 마스크 9개가 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 3개의 마스크를 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{13}$ ② $\frac{17}{26}$ ③ $\frac{9}{13}$ ④ $\frac{19}{26}$ ⑤ $\frac{10}{13}$

26. 주머니에 1이 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 흰 공 1개, 1이 적힌 검은 공 1개, 2가 적힌 검은 공 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B라 할 때, $\mathrm{P}(A \cup B)$의 값은? [3점]

① $\frac{11}{20}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{13}{20}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

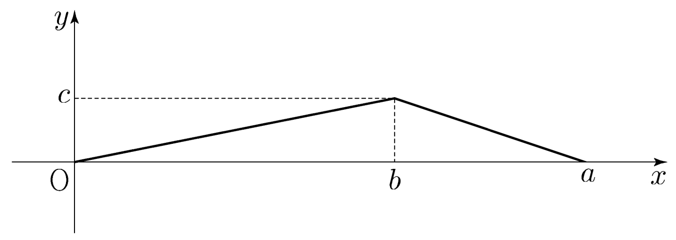


이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 어느 회사에서 생산하는 샴푸 1개의 용량은 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 16개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구한 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $746.1 \le m \le 755.9$이다. 이 회사에서 생산하는 샴푸 중에서 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때, $b-a$의 값이 6 이하가 되기 위한 자연수 n의 최솟값은? (단, 용량의 단위는 mL이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 70 ② 74 ③ 78 ④ 82 ⑤ 86

28. 연속확률변수 X가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le a$이고, X의 확률밀도함수의 그래프가 그림과 같다.



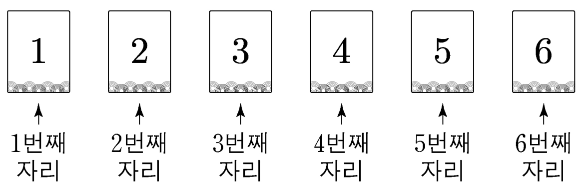
$\mathrm{P}(X \le b) - \mathrm{P}(X \ge b) = \frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(X \le \sqrt{5}) = \frac{1}{2}$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

① $\frac{11}{2}$ ② 6 ③ $\frac{13}{2}$ ④ 7 ⑤ $\frac{15}{2}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 앞면에는 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있고 뒷면에는 모두 0이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드가 그림과 같이 6 이하의 자연수 k에 대하여 k번째 자리에 자연수 k가 보이도록 놓여 있다.



이 6장의 카드와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 k이면 k번째 자리에 놓여 있는 카드를 한 번 뒤집어 제자리에 놓는다.

위의 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수일 때, 주사위의 1의 눈이 한 번만 나왔을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 집합 $X=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) 9 이하의 모든 자연수 x에 대하여 $f(x) \le f(x+1)$이다.
> (나) $1 \le x \le 5$일 때 $f(x) \le x$이고, $6 \le x \le 10$일 때 $f(x) \ge x$이다.
> (다) $f(6)=f(5)+6$

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$ 의 값은? [3점]

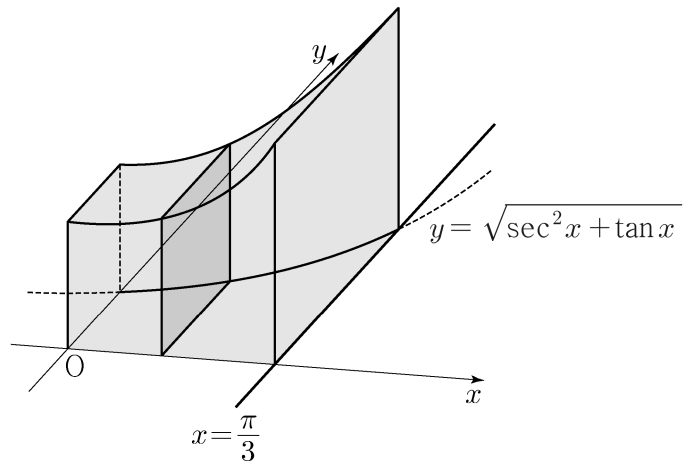
① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{13}{9}$ ③ $\frac{14}{9}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{16}{9}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{\sec^2 x+\tan x}\left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)$와 x축, y축 및 직선 $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

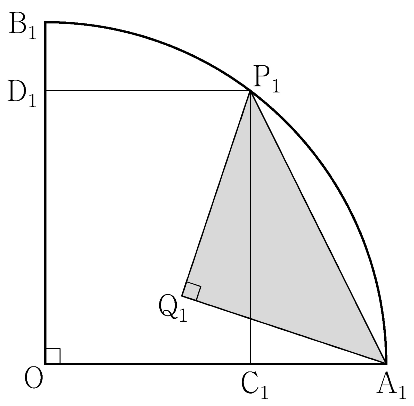


① $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\ln 2}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln 2$ ③ $\sqrt{3}+\frac{\ln 2}{2}$
④ $\sqrt{3}+\ln 2$ ⑤ $\sqrt{3}+2\ln 2$

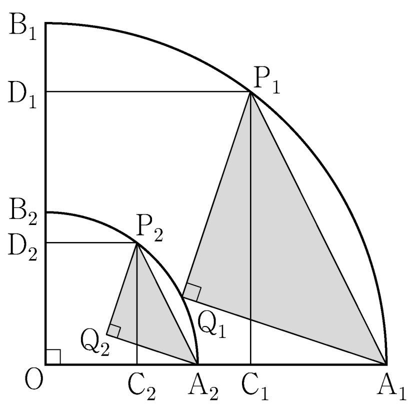
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3:4$인 직사각형이 되도록 잡는다.
부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



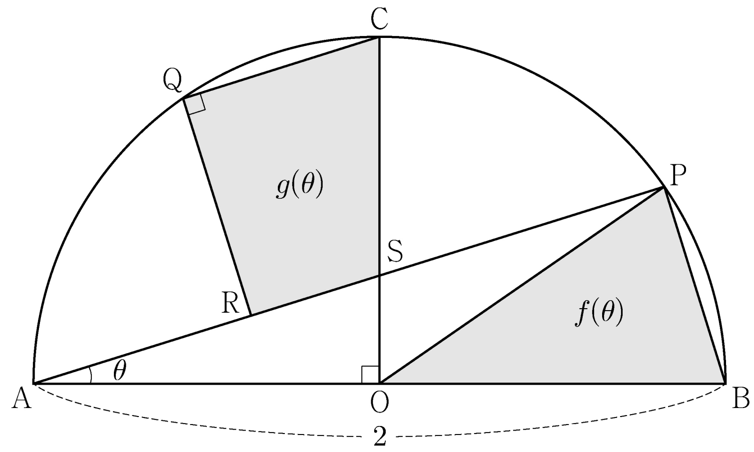
R_2



⋮ ⋮

① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

28. 그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$인 점 C가 있다.
호 BC 위에 점 P와 호 CA 위에 점 Q를 $\overline{PB} = \overline{QC}$가 되도록 잡고, 선분 AP 위에 점 R를 $\angle CQR = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다.
선분 AP와 선분 CO의 교점을 S라 하자. $\angle PAB = \theta$일 때, 삼각형 POB의 넓이를 $f(\theta)$, 사각형 CQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+} \frac{3f(\theta)-2g(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)+6}{e^{x}}=1$
>
> (나) $f(\ln 2)=0$

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\displaystyle\int_{0}^{14}g(x)\,dx=p+q\ln 2$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=e^{\sin\pi x}-1$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 합성함수 $h(x)=g(f(x))$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값 0을 갖는다.
>
> (나) 열린구간 $(0,\,3)$에서 방정식 $h(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 7이다.

$f(3)=\dfrac{1}{2}$, $f'(3)=0$일 때, $f(2)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(기하)

짝수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(2,\ 2,\ -1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 $\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 1)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 초점이 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{3},\ 0\right)$이고 준선이 $x=-\frac{1}{3}$인 포물선이 점 $(a,\ 2)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$일 때, 이 타원의 두 초점 사이의 거리는? (단, a, b는 양수이다.) [3점]

① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{7}$

26. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(2,\ 4),\quad \vec{b}=(2,\ 8),\quad \vec{c}=(1,\ 0)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0,\quad \vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}+t\vec{c}\ (t\text{는 실수})$$

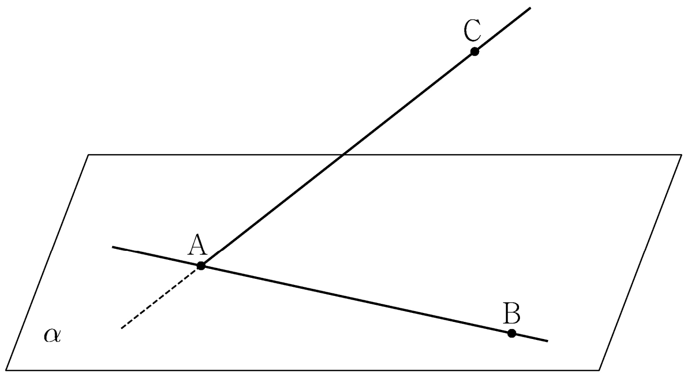
를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1 = \frac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{2} - \theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때, $\cos\theta_2$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{7}}{6}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{8}$

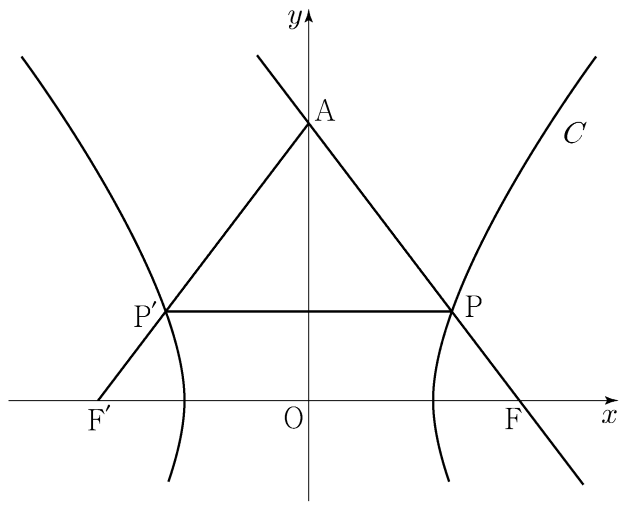


28. 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c > 0)$인 쌍곡선 C와 y축 위의 점 A가 있다. 쌍곡선 C가 선분 AF와 만나는 점을 P, 선분 AF′과 만나는 점을 P′이라 하자.
직선 AF는 쌍곡선 C의 한 점근선과 평행하고

$$\overline{AP} : \overline{PP'} = 5 : 6, \quad \overline{PF} = 1$$

일 때, 쌍곡선 C의 주축의 길이는? [4점]

① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{29}{12}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

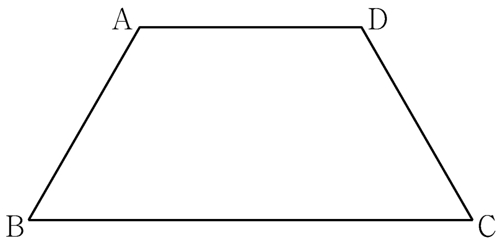


이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

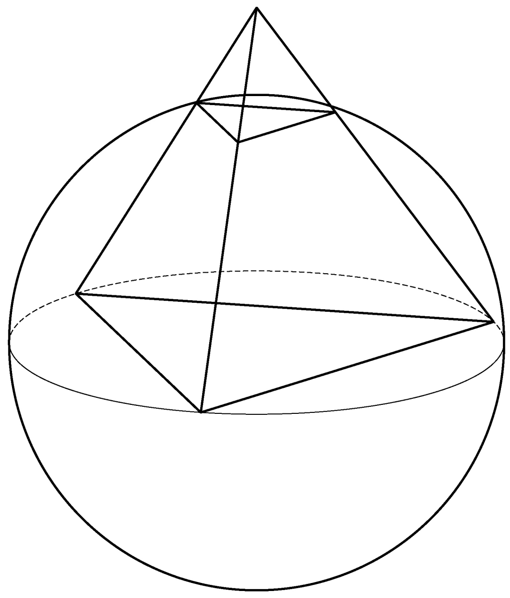
단답형

29. 평면 α 위에 $\overline{AB}=\overline{CD}=\overline{AD}=2$, $\angle ABC=\angle BCD=\frac{\pi}{3}$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면 α 위의 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{DQ}$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $\overrightarrow{AC}=2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BP})$
>
> (나) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PQ}=6$
>
> (다) $2\times\angle BQA=\angle PBQ<\frac{\pi}{2}$



30. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고,
점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.