제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24}\times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$(2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}=6$

2. 함수 $f(x)=2x^3-5x^2+3$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=6x^2-10x$

$f'(2)=24-20=4$

3. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta)=\frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\sin\theta=-\frac{1}{3}$, $\tan\theta=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases}3x-a & (x<2)\\ x^2+a & (x\ge 2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$6-a=4+a$, $a=1$

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2), \quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)=x^2(x-3)+8$

$f(2)=4$

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4, \quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 27 ② 24 ③ 21 ④ 18 ⑤ 15

$a_4+a_3=3a_4$, $r=\dfrac{1}{2}$

$a_1=\dfrac{a_5}{r^4}=12$, $a_2=6$

$a_1+a_2=18$

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x)=x^2-4x-12=(x-6)(x+2)$

$\alpha=-2$, $\beta=6$

$\beta-\alpha=8$

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 12 ② 16 ③ 20 ④ 24 ⑤ 28

$f(x)=3x^3+3x^2+3x$

$\int_{-2}^{2} f(x)dx=2\int_{0}^{2} 3x^2dx=16$

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$$\frac{m\log_5 12+(1-m)\log_5 3}{m+(1-m)}=1$$

$$2m\log_5 2=1-\log_5 3=\log_5\frac{5}{3}$$

$$2^{2m}=\frac{5}{3}=4^m$$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5,\quad v_2(t)=2t-7$$

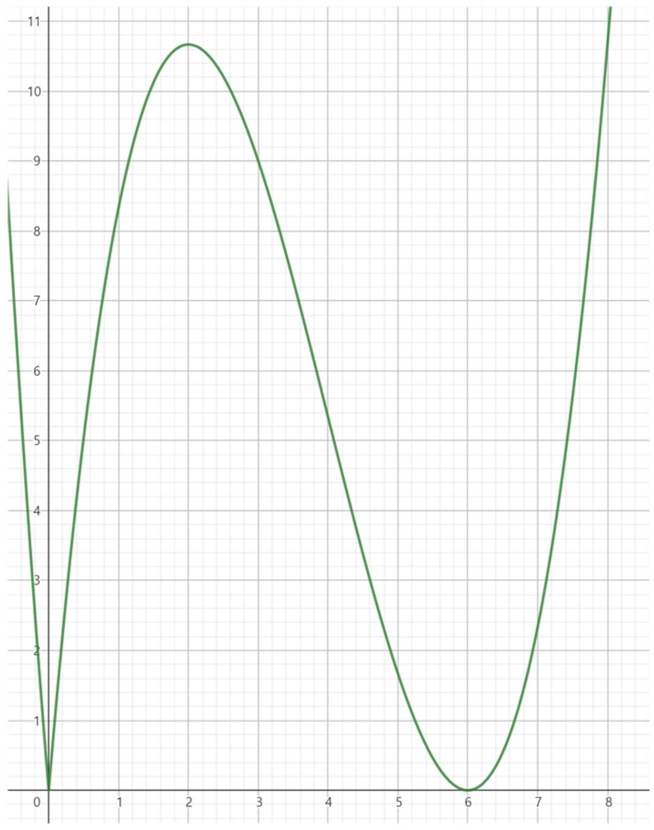
이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0,\,a]$에서 증가하고, 구간 $[a,\,b]$에서 감소하고, 구간 $[b,\,\infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

$f(t)=\left|\frac{1}{3}t^3-4t^2+12t\right|$

$a=2,\ b=6$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times 3+\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 5=\frac{17}{2}$



11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

$a_6 + a_8 = 0,\ a_7 = 0$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{5} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_6} \right) = \frac{1}{d} \left(-\frac{1}{6d} + \frac{1}{d} \right) = \frac{5}{6d^2} = \frac{5}{96}$$

$d = 4$

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = a_{14} + a_{15} = 15d = 60$$

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \ge t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

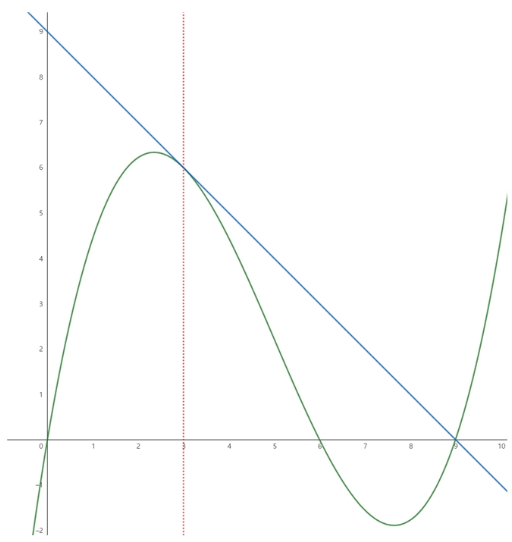
① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

방정식 $f'(x) = -1$의 해는 $x = 3$ or 7이므로

$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 3) \\ -x+9 & (x \ge 3) \end{cases}$ **일 때,**

함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이는 최대이다.

$$\int_0^3 \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)dx + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = \frac{129}{4}$$

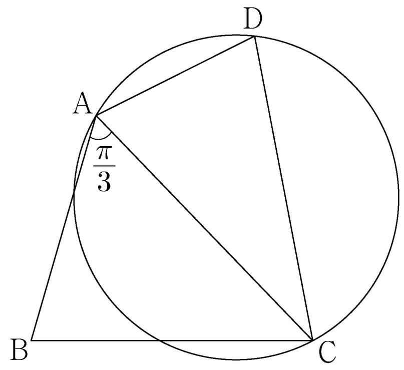


13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=3,\quad \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13},\quad \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=9,\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

$\overline{AC}=4,\ S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$S_2=\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\angle ADC)$

$\sin(\angle ADC)=\frac{5\sqrt{3}}{9}$

$\frac{4}{\sin(\angle ADC)}=2R,\ R=\frac{2}{\sin(\angle ADC)}$

$\frac{R}{\sin(\angle ADC)}=\frac{2}{\sin^2(\angle ADC)}=\frac{54}{25}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

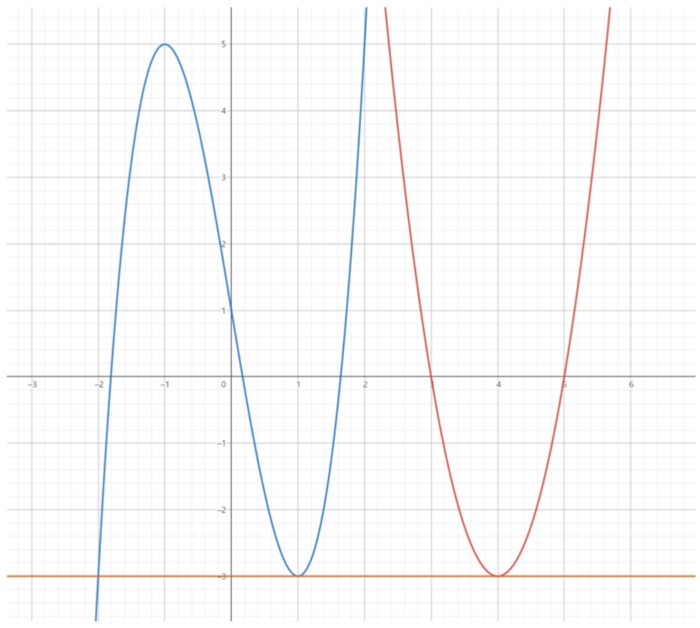
$$f(x)=\begin{cases} 2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a,b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55



방정식 $a(x-2)(x-b)+9=-3$이 중근을 가질 때, 문제의 조건에 맞으므로 자연수 a,b는

$a\left(\frac{b+2}{2}-2\right)\left(\frac{b+2}{2}-b\right)=-12,\ a(b-2)^2=48$ **을 만족시키면 된다.**

(a,b)의 순서쌍 중에서 $a+b$의 값이 최대가 되는 경우는 $a=48,\ b=3$일 때 이다.

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

a_6**이 짝수이면,** $a_7=\frac{1}{2}a_6$, $a_6=2$

a_6**이 홀수이면,** $a_7=2^{a_6}$, $a_6=1$

1) $a_6=1$**인 경우**

$a_5=2,\ a_4=4,\ a_3=8,\ a_2=16,\ a_1=32$
$a_5=2,\ a_4=4,\ a_3=8,\ a_2=3,\ a_1=6$
$a_5=2,\ a_4=1,\ a_3=2,\ a_2=4,\ a_1=8$
$a_5=2,\ a_4=1,\ a_3=2,\ a_2=1,\ a_1=2$

2) $a_6=2$**인 경우**

$a_5=4,\ a_4=8,\ a_3=16,\ a_2=32,\ a_1=64$
$a_5=4,\ a_4=8,\ a_3=16,\ a_2=32,\ a_1=5$
$a_5=4,\ a_4=8,\ a_3=3,\ a_2=6,\ a_1=12$
$a_5=1,\ a_4=2,\ a_3=4,\ a_2=8,\ a_1=16$
$a_5=1,\ a_4=2,\ a_3=4,\ a_2=8,\ a_1=3$
$a_5=1,\ a_4=2,\ a_3=1,\ a_2=2,\ a_1=4$
$a_5=1,\ a_4=2,\ a_3=1,\ a_2=2,\ a_1=1$

153

단답형

16. 방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x}$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x-8=-3x$

$x=2$

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f'(x)=(x^2+3)+(x+1)\times 2x$

$f'(1)=8$

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10} a_k = A$, $\sum_{k=1}^{10} b_k = B$

$A = 2B - 10$, $3A + B = 33$

$B = 9$

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$f(2+x)f(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)$

$-\frac{1}{2} < \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) < \frac{1}{2}$

$2 + 6 + 10 + 14 = 32$

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

$A(a, 2a)$이고 직선 OA와 직선 AB는 수직이므로

$2 \times (-3a^2 + 2a^2 + 2) = -1$

$a^2 = \frac{5}{2}$

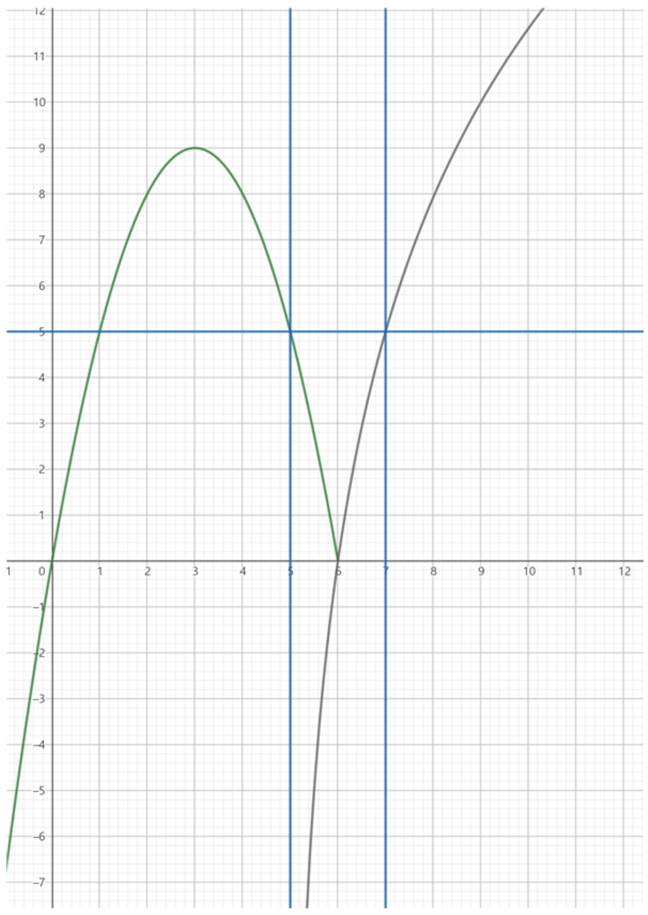
$\overline{OA} = \sqrt{5}a$, $\overline{AB} = 2 \times \overline{OA} = 2\sqrt{5}a$

$\overline{OA} \times \overline{AB} = 2 \times 5 \times a^2 = 25$

21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\, t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\, \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]



$a\log_4 2 \geq 5,\ a \geq 10$

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1)<0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

임의의 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \geq 0$

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4},\ f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$

$\alpha < -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4} < \beta$

$f'(\alpha)=f'(\beta)=0$

$f(\alpha)<0,\ f(\beta)<0$ 또는 $f(\alpha)>0,\ f(\beta)>0$ 이면
임의의 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \geq 0$을 만족시킬 수 없다.

$\therefore f(\alpha)>0,\ f(\beta)<0$

$f(0)>0$ or $f(0)<0$이면
임의의 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \geq 0$을 만족시킬 수 없다.

$f(1)>0$ or $f(1)<0$이면
임의의 정수 k에 대하여 $f(k-1)f(k+1) \geq 0$을 만족시킬 수 없다.

$\therefore f(0)=f(1)=0$

$f(x)=(x-\alpha)(x)(x-1)$ 이고

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$ 이므로 $\alpha=-\frac{5}{8}$이다.

$\therefore f(x)=\left(x+\frac{5}{8}\right)x(x-1)$

$\therefore f(8)=483$

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

$$\frac{5!}{2!2!}=30$$

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A^C)=2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

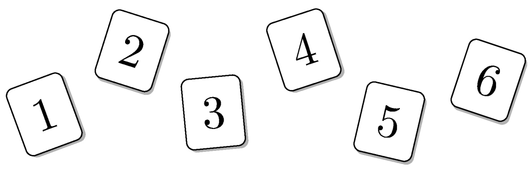
① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

$$1-P(A)=2P(A),\ P(A)=\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times P(B)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{3}{4}$$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$ ② $\frac{19}{30}$ ③ $\frac{11}{15}$ ④ $\frac{5}{6}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이

10**초과일 확률은** $\frac{2!\times 4!}{6!}=\frac{1}{15}$ **이므로**

$1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$ ② $\frac{13}{8}$ ③ $\frac{27}{16}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

Y	0	1	2	계
$P(Y=x)$	${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4$	${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4$	$\frac{11}{16}$	1

$E(Y)=\frac{4+22}{16}=\frac{13}{8}$

27. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

$N\left(m,\ \left(\frac{5}{7}\right)^2\right)$

$\frac{6}{5}a - a = 2 \times 1.96 \times \frac{5}{7}$

$a = 14$

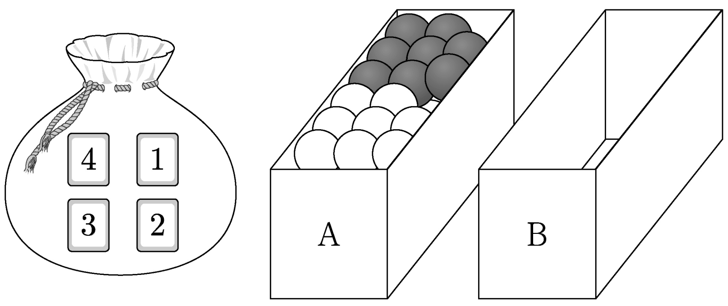
$\overline{x} = a + 1.96 \times \frac{5}{7} = 15.4$

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은?
[4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



상자 B에 8개의 공이 들어 있으려면
1, 4가 각각 2번씩
1, 4가 각각 1번, 2 or 3이 2번
2 or 3이 4번

1, 4가 각각 2번씩 나올 확률은 $\dfrac{\frac{4!}{2!2!}}{4^4}$이고
이 때, 상자 B에 검은 공이 2개 들어 있다.

1, 4가 각각 1번, 2 or 3이 2번 나올 확률은 $\dfrac{\frac{4!}{2!} \times 2 + 4!}{4^4}$이고
이 때, 상자 B에 검은 공이 3개 들어 있다.

2 or 3이 4번 나올 확률은 $\frac{1}{16}$
이 때, 상자 B에 검은 공이 4개 들어 있다.

$$\frac{\dfrac{\frac{4!}{2!2!}}{4^4}}{\dfrac{\frac{4!}{2!2!}}{4^4} + \dfrac{\frac{4!}{2!} \times 2 + 4!}{4^4} + \dfrac{1}{16}} = \frac{3}{35}$$

원에 있습니다.

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> $a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$이다.

$c=1,\ 6$
$c=2,\ 2^2 \times 5$
$c=3,\ 3^2 \times 4$
$c=4,\ 4^2 \times 3$
$c=5,\ 5^2 \times 2$
$c=6,\ 6^2 \times 1$

196

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le 5t) \ge \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

$\frac{5t-1}{t} \ge 0,\ t \ge \frac{1}{5}$

$P(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$
$=P(t-1 \le Z \le t+1)$

최댓값은 $t=\frac{1}{5}$ **일 때,**

$P(-0.8 \le Z \le 1.2)$
$=0.288+0.385=0.673$

$1000k=673$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3}{\frac{\ln(1+5x)}{5x}\times 5}=\frac{3}{5}$$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1),\quad y=\sin\pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\pi\cos\pi t}{\frac{3t^2}{t^3+1}}=\frac{-\pi}{\frac{3}{2}}=-\frac{2}{3}\pi$$

25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)}dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

$g(x)$의 역함수가 $f(x)$이고 $g(x)$의 정의역은 $f(x)$의 치역이 되므로 $f(x)>0$

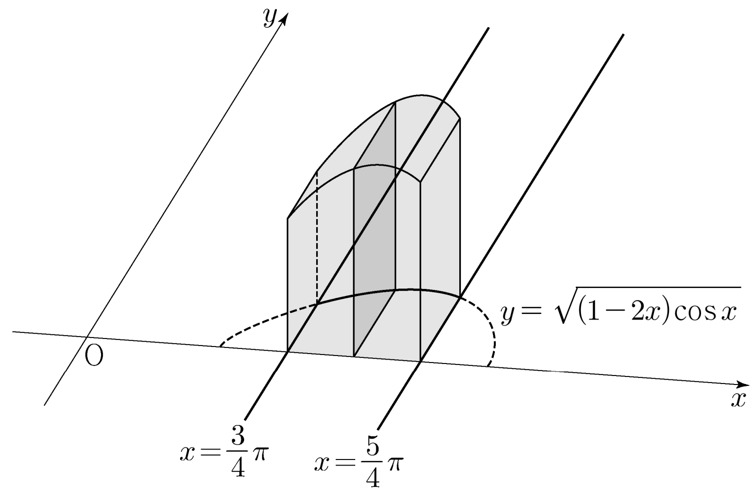
$$\frac{1}{g'(f(x))} = f'(x)$$

$$\int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(a)| - \ln|f(1)|$$
$$= 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

$\ln f(2) - \ln 8 = 2\ln 2 + \ln 3 - \ln 2$

$f(2) = 48$

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

$$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx$$
$$= \left[(1-2x)\sin x\right]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} + 2\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\sin x\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\left(1-\frac{5}{2}\right)\pi - \left(1-\frac{3}{2}\right)\pi\right\}$$
$$= 2\sqrt{2}\pi - \sqrt{2}$$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

접점의 x좌표를 α라 하면

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{e^\alpha}+e^t\right)=-\frac{1}{e^\alpha}=f(t),$$

$$f(a)=-e\sqrt{e}=-\frac{1}{e^\alpha},\ \alpha=-\frac{3}{2}$$

$$-f(t)+e^t=-f(t)\ln(-f(t))$$

$$-f'(t)+e^t=-f'(t)\ln(-f(t))-f(t)\times\frac{-f'(t)}{-f(t)}$$

$$f'(a)=-\frac{e^a}{\ln(-f(a))}$$

$$f(a)=-\frac{2}{3}(e\sqrt{e}+e^a)=-e\sqrt{e},\ e^a=\frac{1}{2}e\sqrt{e}$$

$$f'(a)=-\frac{\frac{1}{2}e\sqrt{e}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k\ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

또한 모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고 $f(x)\geq 0$이므로 $k>0$이고 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$f(x)=\begin{cases}-4xe^{4x^2} & (x<0)\\ 0 & (0\leq x<k)\\ 2(x-k)e^{(x-k)^2} & (x\geq k)\end{cases}$$

$$\int_k^{k+\alpha} f(x)dx=\int_0^\alpha 2xe^{x^2}dx=e^{\alpha^2}-1=e^4-1$$

$$\alpha=2,\ k+\alpha=7,\ k=5$$

$$f(x)=\begin{cases}-4xe^{4x^2} & (x<0)\\ 0 & (0\leq x<5)\\ 2(x-5)e^{(x-5)^2} & (x\geq 5)\end{cases}$$

$$\frac{f(9)}{f(8)}=\frac{2\times 4e^{16}}{2\times 3e^9}=\frac{4}{3}e^7$$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

$-1 < r_a < 1,\ -1 < r_a < 1$

$$\frac{a_1 b_1}{1-r_a r_b} = \frac{a_1}{1-r_a} \times \frac{b_1}{1-r_b}$$

$$r_b = \frac{r_a}{2r_a - 1}$$

$$\frac{3|a_2|}{1-r^2} = \frac{7|a_3|}{1-|r|^3}$$

$r_a = r > 0$

$3(1-r^3) = 7r(1-r^2),\ 4r^3 - 7r + 3 = 0$
$(r-1)(2r-1)(2r-3) = 0$

$r_a = \frac{1}{2}$**이면 문제의 조건에 맞지 않는다.**

$r < 0$
$3(1+r^3) = -7r(1-r^2),\ 4r^3 - 7r - 3 = 0$
$(r+1)(2r+1)(2r-3) = 0$

$$r = r_a = -\frac{1}{2},\ r_b = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{64}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{27}{20}$$

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

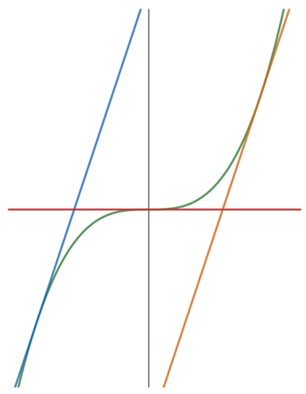
$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}\,dt$$

가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

다음 그래프($y = x^3$)를 예로 들어보면

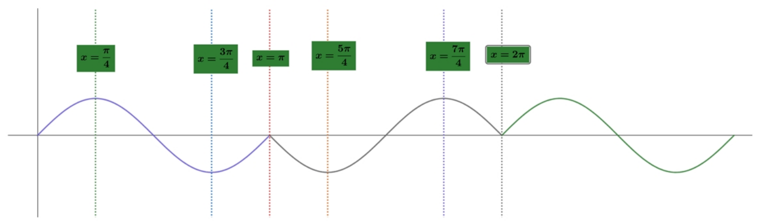


$\begin{cases} f(t)-g(t) < 0\ (t < 0) \\ f(t)-g(t) > 0\ (t > 0) \end{cases}$**이므로 $f(x)$의 변곡점에서**

$h(x)$는 극값을 갖음을 알 수 있다.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin 2x & (0 \le x < \pi) \\ -\frac{1}{2}\sin 2x & (\pi \le x < 2\pi) \\ \frac{1}{2}\sin 2x & (2\pi \le x < 3\pi) \\ \vdots \end{cases}$$

이고 그래프는 다음과 같다.



$$a_1 = \frac{\pi}{4},\ a_2 = \frac{3\pi}{4},\ a_3 = \pi,\ a_4 = \frac{5\pi}{4},\ a_5 = \frac{7\pi}{4},\ a_6 = 2\pi$$

$$\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2) = 125$$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ -2,\ 6)$, $\mathrm{B}(9,\ 2,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4,\ 0,\ 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

24. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $\left(\sqrt{3},\ -2\right)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}} = 6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PM'}} \perp \overline{\mathrm{A'B'}}, \quad \overline{\mathrm{PM'}} = 6$$

이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.

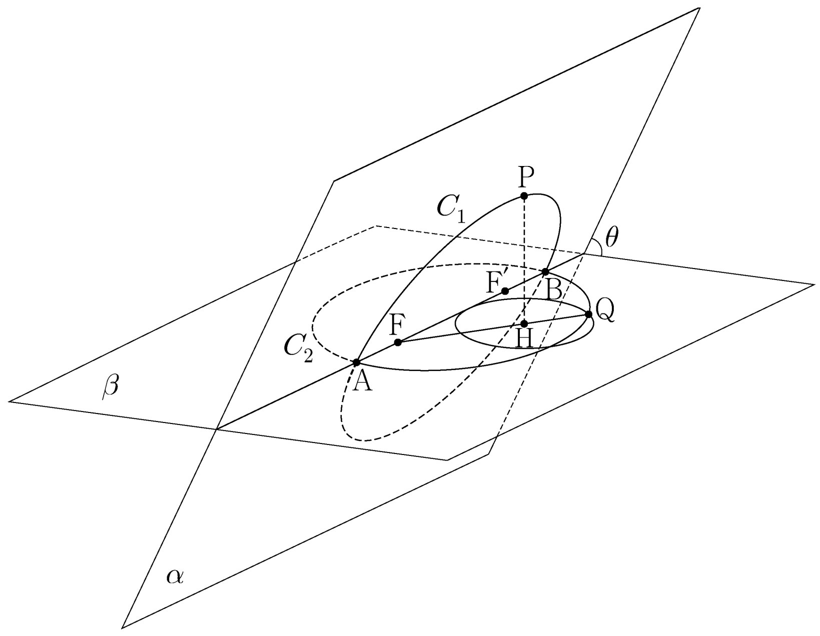
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC}=\overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{CF}<\overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$ ④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'}<\overline{HF}$이고 $\angle HFF'=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH}<\overline{FQ}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
> 점 Q는 직선 PF' 위에 있다.
>
> (나) 삼각형 $\mathrm{PF'F}$는 이등변삼각형이다.
>
> (다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 1:3으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 1:3으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 1:3으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{EQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{FR}}| = 1$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{QC}} + \overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\sqrt[3]{24} \times 3^{\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

2. 함수 $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3$ 에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin(-\theta) = \frac{1}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

4. 함수

$$f(x) = \begin{cases} 3x - a & (x < 2) \\ x^2 + a & (x \geq 2) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=3x(x-2),\quad f(1)=6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_2=3a_4,\quad a_5=\frac{3}{4}$$

일 때, a_1+a_2의 값은? [3점]

① 15 ② 18 ③ 21 ④ 24 ⑤ 27

7. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2-12x+4$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소일 때, $\beta-\alpha$의 값은? (단, α와 β는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$$

를 만족시킬 때, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 28 ② 24 ③ 20 ④ 16 ⑤ 12

9. 수직선 위의 두 점 $\mathrm{P}(\log_5 3)$, $\mathrm{Q}(\log_5 12)$에 대하여 선분 PQ를 $m:(1-m)$으로 내분하는 점의 좌표가 1일 때, 4^m의 값은? (단, m은 $0<m<1$인 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

10. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=t^2-6t+5, \quad v_2(t)=2t-7$$

이다. 시각 t에서의 두 점 P, Q 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$는 구간 $[0, a]$에서 증가하고, 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, \infty)$에서 증가한다. 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 Q가 움직인 거리는? (단, $0<a<b$) [4점]

① $\frac{15}{2}$ ② $\frac{17}{2}$ ③ $\frac{19}{2}$ ④ $\frac{21}{2}$ ⑤ $\frac{23}{2}$

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_6| = a_8, \quad \sum_{k=1}^{5} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{96}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{15} a_k$의 값은? [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

12. 함수 $f(x) = \frac{1}{9}x(x-6)(x-9)$와 실수 $t\,(0 < t < 6)$에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x < t) \\ -(x-t) + f(t) & (x \geq t) \end{cases}$$

이다. 함수 $y = g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이의 최댓값은? [4점]

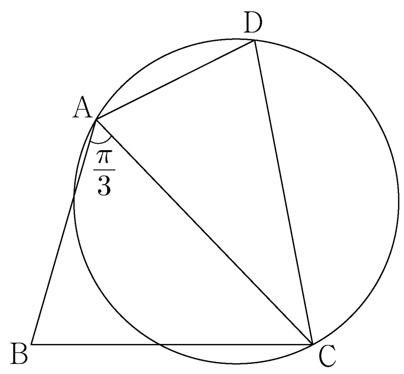
① $\frac{125}{4}$ ② $\frac{127}{4}$ ③ $\frac{129}{4}$ ④ $\frac{131}{4}$ ⑤ $\frac{133}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{AB}}=3,\quad \overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{13},\quad \overline{\mathrm{AD}}\times\overline{\mathrm{CD}}=9,\quad \angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{3}$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 ACD의 넓이를 S_2라 하고, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하자.

$S_2=\frac{5}{6}S_1$일 때, $\frac{R}{\sin(\angle\mathrm{ADC})}$의 값은? [4점]



① $\frac{54}{25}$ ② $\frac{117}{50}$ ③ $\frac{63}{25}$ ④ $\frac{27}{10}$ ⑤ $\frac{72}{25}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}2x^3-6x+1 & (x\le 2)\\ a(x-2)(x-b)+9 & (x>2)\end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.

$$g(k)+\lim_{t\to k-}g(t)+\lim_{t\to k+}g(t)=9$$

를 만족시키는 실수 k의 개수가 1이 되도록 하는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값은? [4점]

① 51 ② 52 ③ 53 ④ 54 ⑤ 55

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153 ④ 160 ⑤ 167

단답형

16. 방정식 $3^{x-8}=\left(\frac{1}{27}\right)^x$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)=(x+1)(x^2+3)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2b_k - 1), \quad \sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k) = 33$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} b_k$의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = \sin\frac{\pi}{4}x$라 할 때, $0 < x < 16$에서 부등식

$$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$$

을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

20. $a > \sqrt{2}$인 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 2x$$

라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $\mathrm{O}(0, 0)$에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 만나는 점 중 O가 아닌 점을 A라 하고, 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라 하자. 점 A가 선분 OB를 지름으로 하는 원 위의 점일 때, $\overline{\mathrm{OA}} \times \overline{\mathrm{AB}}$의 값을 구하시오. [4점]

21. 양수 a에 대하여 $x \geq -1$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x & (-1 \leq x < 6) \\ a\log_4(x-5) & (x \geq 6) \end{cases}$$

이다. $t \geq 0$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t-1,\ t+1]$에서의 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 구간 $[0,\ \infty)$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 5가 되도록 하는 양수 a의 최솟값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $f(k-1)f(k+1) < 0$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

짝수형

5지선다형

23. 5개의 문자 x, x, y, y, z를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

24. 두 사건 A, B는 서로 독립이고

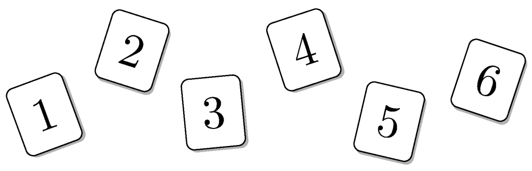
$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}, \quad \mathrm{P}(A^C) = 2\mathrm{P}(A)$$

일 때, $\mathrm{P}(B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 6장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓일 확률은? [3점]

① $\frac{8}{15}$　② $\frac{19}{30}$　③ $\frac{11}{15}$　④ $\frac{5}{6}$　⑤ $\frac{14}{15}$



26. 4개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 나오는 동전의 개수를 확률변수 X라 하고, 이산확률변수 Y를

$$Y=\begin{cases} X & (X\text{가 } 0 \text{ 또는 } 1\text{의 값을 가지는 경우}) \\ 2 & (X\text{가 } 2 \text{ 이상의 값을 가지는 경우}) \end{cases}$$

라 하자. $\mathrm{E}(Y)$의 값은? [3점]

① $\frac{25}{16}$　② $\frac{13}{8}$　③ $\frac{27}{16}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{29}{16}$

27. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 49인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\overline{x}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{6}{5}a$이다. $\overline{x}$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$로 계산한다.) [3점]

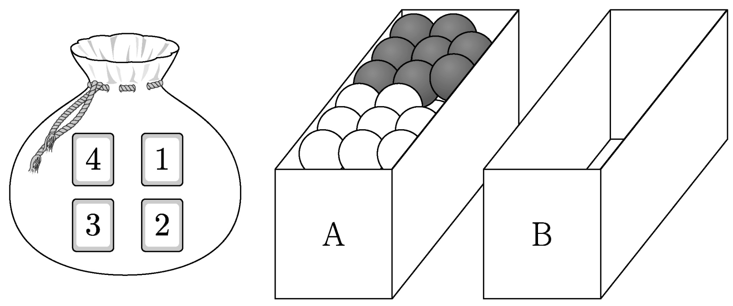
① 15.2 ② 15.4 ③ 15.6 ④ 15.8 ⑤ 16.0

28. 하나의 주머니와 두 상자 A, B가 있다. 주머니에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4장의 카드가 들어 있고, 상자 A에는 흰 공과 검은 공이 각각 8개 이상 들어 있고, 상자 B는 비어 있다. 이 주머니와 두 상자 A, B를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어
> 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 주머니에 넣는다.
>
> 확인한 수가 1이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 2 또는 3이면
> 상자 A에 있는 흰 공 1개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣고,
>
> 확인한 수가 4이면
> 상자 A에 있는 흰 공 2개와 검은 공 1개를 상자 B에 넣는다.

이 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8일 때, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{70}$ ② $\frac{2}{35}$ ③ $\frac{1}{14}$ ④ $\frac{3}{35}$ ⑤ $\frac{1}{10}$



단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

> $a \leq c \leq d$이고 $b \leq c \leq d$이다.

30. 양수 t에 대하여 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(1, t^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2}$$

이 되도록 하는 모든 양수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000 \times k$의 값을 구하시오. [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \leq Z \leq z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{\ln(1+5x)}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 곡선

$$x=\ln(t^3+1), \quad y=\sin \pi t$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}\pi$ ② $-\frac{2}{3}\pi$ ③ $-\pi$ ④ $-\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $-\frac{5}{3}\pi$

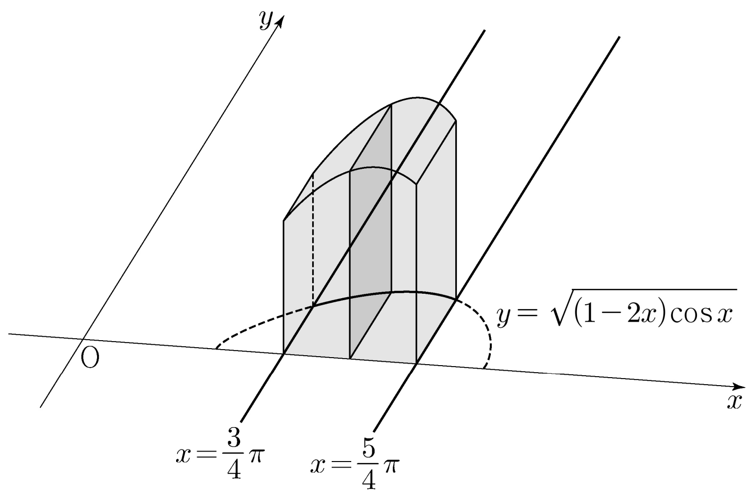
25. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이고, $g'(x)$는 양의 실수 전체의 집합에서 연속이다.
모든 양수 a에 대하여

$$\int_{1}^{a} \frac{1}{g'(f(x))f(x)}\,dx = 2\ln a + \ln(a+1) - \ln 2$$

이고 $f(1)=8$일 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

26. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$ $\left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{3}{4}\pi$, $x=\frac{5}{4}\pi$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]



① $\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}\pi-1$ ③ $2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$
④ $2\sqrt{2}\pi-1$ ⑤ $2\sqrt{2}\pi$

27. 실수 t에 대하여 원점을 지나고 곡선 $y=\frac{1}{e^x}+e^t$에 접하는 직선의 기울기를 $f(t)$라 하자. $f(a)=-e\sqrt{e}$를 만족시키는 상수 a에 대하여 $f'(a)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{3}e\sqrt{e}$ ② $-\frac{1}{2}e\sqrt{e}$ ③ $-\frac{2}{3}e\sqrt{e}$ ④ $-\frac{5}{6}e\sqrt{e}$ ⑤ $-e\sqrt{e}$

28. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고, $x<0$일 때 $f(x)=-4xe^{4x^2}$이다.
모든 양수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이 방정식의 두 실근 중 작은 값을 $g(t)$, 큰 값을 $h(t)$라 하자.
두 함수 $g(t)$, $h(t)$는 모든 양수 t에 대하여

$$2g(t)+h(t)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. $\int_0^7 f(x)\,dx=e^4-1$일 때, $\frac{f(9)}{f(8)}$의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}e^5$ ② $\frac{4}{3}e^7$ ③ $\frac{5}{4}e^9$ ④ $\frac{6}{5}e^{11}$ ⑤ $\frac{7}{6}e^{13}$

단답형

29. 첫째항과 공비가 각각 0이 아닌 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 각각 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

$$3 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{2n}| = 7 \times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n}|$$

이 성립한다. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n-1}+b_{3n+1}}{b_n} = S$일 때, $120S$의 값을 구하시오. [4점]

30. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t)-g(t)\}dt$$

가 $x=a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

짝수형

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a, -2, 6)$, $\mathrm{B}(9, 2, b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(4, 0, 7)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

24. 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $\left(\sqrt{3}, -2\right)$에서의 접선의 기울기는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ④ $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

25. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$|\vec{a}| = \sqrt{11}, \quad |\vec{b}| = 3, \quad |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{17}$$

일 때, $|\vec{a} - \vec{b}|$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

26. 좌표공간에 평면 α가 있다. 평면 α 위에 있지 않은 서로 다른 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영을 각각 A′, B′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A'B'}} = 6$$

이다. 선분 AB의 중점 M의 평면 α 위로의 정사영을 M′이라 할 때,

$$\overline{\mathrm{PM'}} \perp \overline{\mathrm{A'B'}}, \quad \overline{\mathrm{PM'}} = 6$$

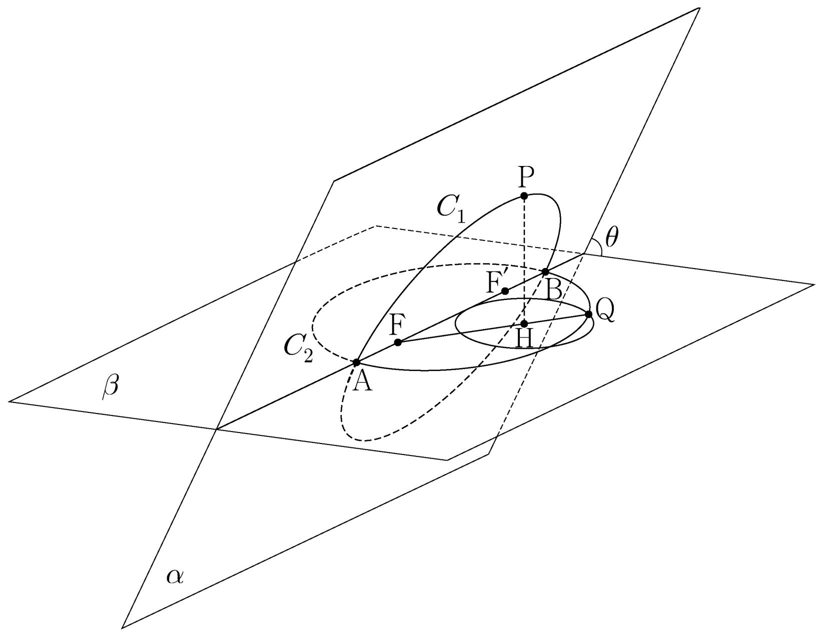
이 되도록 평면 α 위에 점 P를 잡는다.
삼각형 A′B′P의 평면 ABP 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{9}{2}$일 때, 선분 PM의 길이는? [3점]

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

27. 초점이 F인 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 직선 BF와 포물선이 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자. $\overline{BC} = \overline{CD}$일 때, 삼각형 ABD의 넓이는? (단, $\overline{CF} < \overline{DF}$이고, 점 A는 원점이 아니다.) [3점]

① $100\sqrt{2}$ ② $104\sqrt{2}$ ③ $108\sqrt{2}$ ④ $112\sqrt{2}$ ⑤ $116\sqrt{2}$

28. 그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{AB} = 18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F$'$을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다. 원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{HF'} < \overline{HF}$이고 $\angle HFF' = \frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{FH} < \overline{FQ}$이다. 점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]



① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

단답형

29. 양수 c에 대하여 두 점 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F'}(-c,\,0)$을 초점으로 하고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선 위에 다음 조건을 만족시키는 서로 다른 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 c의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) 점 P는 제1사분면 위에 있고,
> 점 Q는 직선 $\mathrm{PF'}$ 위에 있다.
>
> (나) 삼각형 $\mathrm{PF'F}$는 이등변삼각형이다.
>
> (다) 삼각형 PQF의 둘레의 길이는 28이다.

30. 좌표평면에 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점을 D, 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점을 E, 선분 CA를 $1:3$으로 내분하는 점을 F라 하자. 네 점 P, Q, R, X가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{FR}}|=1$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{RA}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|$의 값이 최대일 때, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하자. $16S^2$의 값을 구하시오. [4점]

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.