제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = \frac{1}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2 + 6x + 1,\ f'(1) = 10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 6, \quad a_4 + a_6 = 36$$

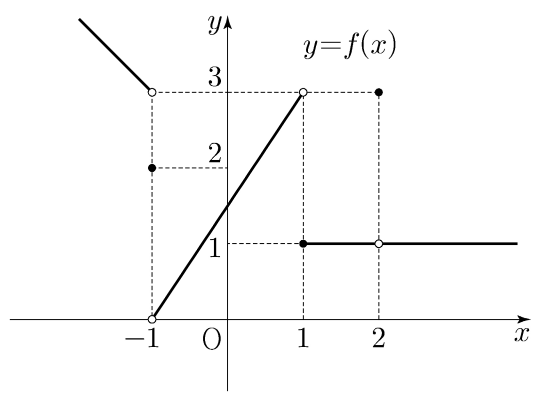
일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_5 = 18,\ a_2 = 6,\ d = 4$

$a_{10} = 38$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 3,\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_1=1$
$a_2=2$
$a_3=4$
$a_4=8$
$a_5=1$

$\therefore \sum_{k=1}^{8} a_k=2(1+2+4+8)=30$

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$16-12-24<-k<-2-3+12$
$-7<k<20$

26

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$\tan\theta=3$

$\sin\theta=\frac{-3}{\sqrt{10}},\ \cos\theta=\frac{-1}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$$\frac{1}{6}6^3=2\int_0^k(6x-x^2)dx$$

$$18=3k^2-\frac{1}{3}k^3$$

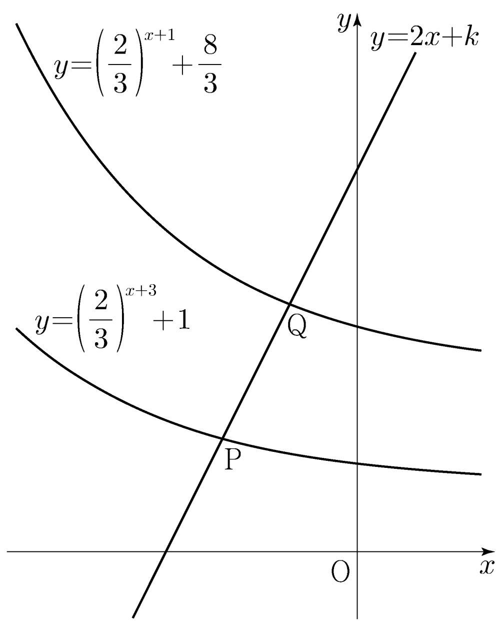
$$k=3$$

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$$P\left(a,\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1\right),\ Q\left(a+1,\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}\right)$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{8}{3}-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1\right\}=2$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=\frac{1}{3},\ a=-2$$

$$P\left(-2,\frac{5}{3}\right),\ k=\frac{17}{3}$$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

$$f(0)=0,\ f(1)=2$$

$$f'(0)=2,$$

$$f(1)+f'(1)=2$$

$$f'(1)=0$$

$$f(x)=ax^3+bx^2+2x$$

$$a+b+2=2,\ 3a+2b+2=0,\ a=-2,\ b=2$$

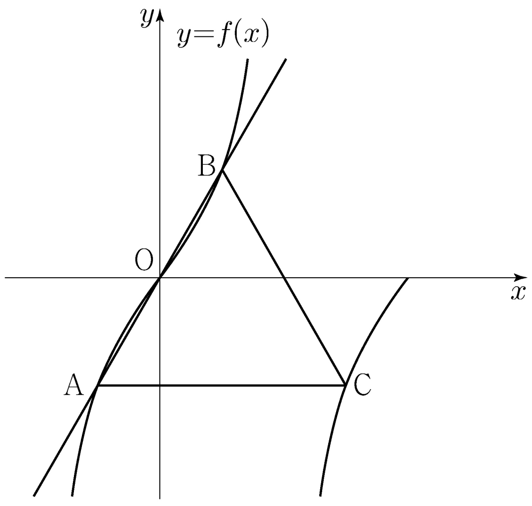
$$f'(x)=-6x^2+4x+2$$

$$f'(2)=-24+8+2=-14$$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}<x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\dfrac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$ **이므로 삼각형 ABC의 한변의 길이는 a**

$B\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\sqrt{3}\right)$, $\frac{a}{4}\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{4}=1$, $a=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

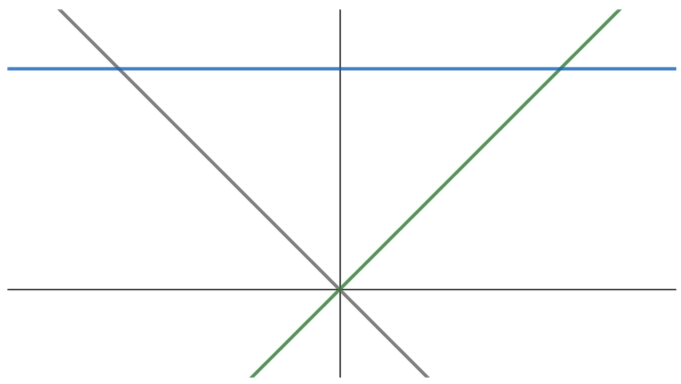
12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$
$\{f(x)-1\}\left[\{f(x)\}^2-x^2\right]=0$
$\{f(x)-1\}\{f(x)-x\}\{f(x)+x\}=0$



$$f(x)=\begin{cases}1 & (x<-1)\\ -x & (-1\le x<0)\\ x & (0\le x<1)\\ 1 & (1\le x)\end{cases}$$

$f\left(-\frac{4}{3}\right)=1$, $f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$a : b = \log_2 a - \log_4 a : \log_2 b - \log_4 b$

$\log_4 a^b = \log_4 b^a$, $a^b = b^a = 20$

$f(2) = a^{2b} + b^{2a} = 800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

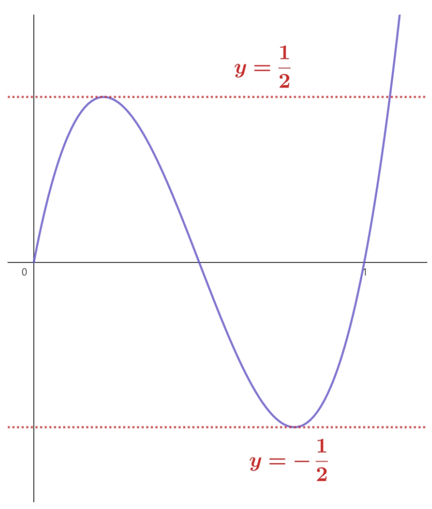
ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

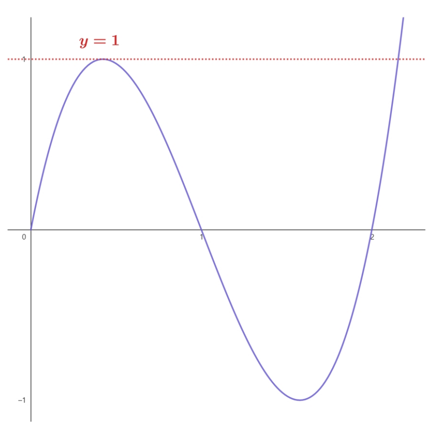
ㄱ. $\int_0^1 v(t)dt = x(1) = 0$ 참

ㄴ. $t=1$까지의 이동거리는 2이고 $t=1$일 때의 위치가 출발점이므로 $|x(t_1)| \le 1$ 거짓

ㄷ. 운동 방향은 최대 2번 바꿀 수 있고 $t=1$까지의 이동거리는 2이고 $t=1$일 때의 위치가 출발점이므로 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다. 참

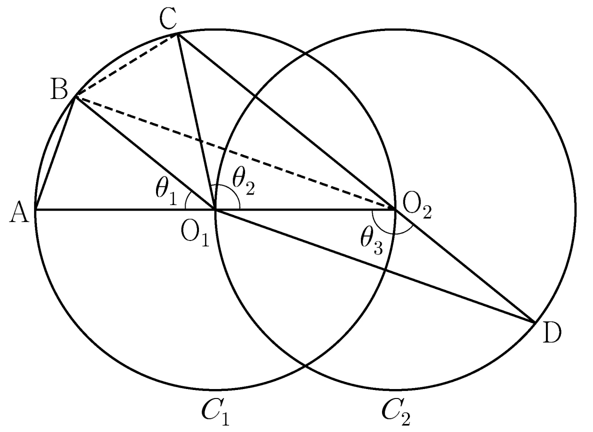


$x(t)=3\sqrt{3}\,t(t-1)(2t-1)$



$x(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}t(t-1)(t-2)$

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

가 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AO_2}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=3k$

나 $\dfrac{2\sqrt{2}k}{3k}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

다 $k^2=8k^2+\overline{O_2C}^2-2\times2\sqrt{2}k\times\overline{O_2C}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{O_2C}=\dfrac{7}{3}k$

$f(p)\times g(p)=3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\dfrac{7}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2 120\times\dfrac{1}{15}=3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=x^3+x^2+2$

$f(1)=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

$$2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 112$$

$$2\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

$a_8 = 12$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$

$D/4 = a^2 + 3(a^2 - 8a) \le 0$

$4a(a-6) \le 0$

6

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x+1)dx$$

$$= \int_0^1 \{xf(x) + ax + b\}dx$$

$f'(1) = 1,\ f(1) = 1,\ f(0) = 0$

$b = 1,\ a = 1$

$$\int_0^1 \{xf(x) + ax + b\}dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 + x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lvert a_1 \rvert = 2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\lvert a_{n+1} \rvert = 2\lvert a_n \rvert$ 이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$$\sum_{k=1}^{n} \lvert a_k \rvert = 2(2^n - 1),\ \lvert a_{n+1} \rvert = 2^{n+1}$$

$$-2,\ -4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \cdot\cdot\cdot,\ 512,\ -1024$$

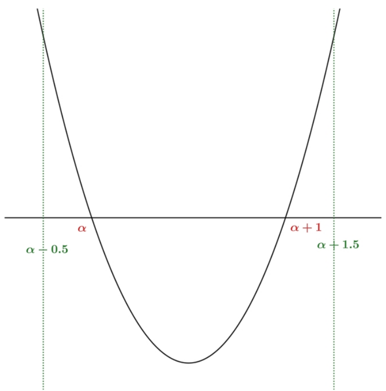
$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 = 678$$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

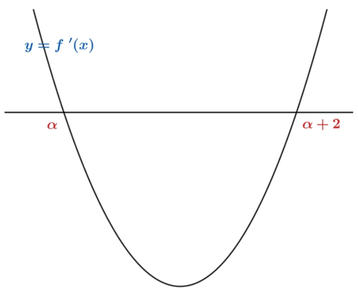
(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \le 2$이다.
(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

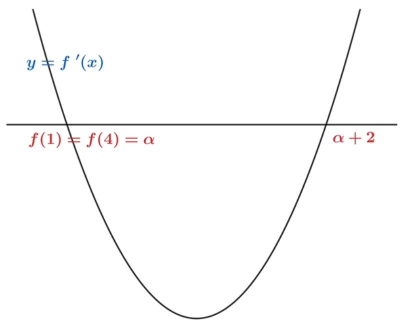
(나)에서 $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$이므로 방정식 $f'(x) = 0$의 실근은 서로 다른 2개 임을 알 수 있다.

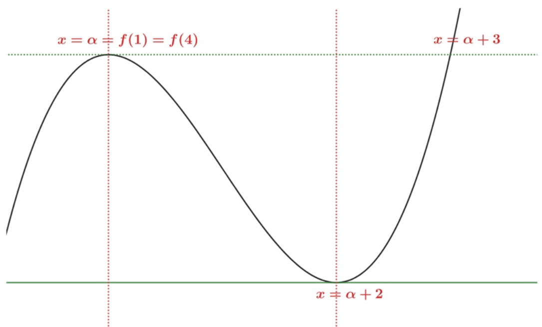


방정식 $f'(x) = 0$의 실근을 각각 α, $\alpha+1$이라 가정해보면 $\lim_{t \to \alpha+0.5+} g(t) + \lim_{t \to \alpha+0.5-} g(t) = 4$ 이므로 (가) 조건을 만족시키려면 방정식 $f'(x) = 0$의 실근은 α, $\alpha+2$여야 함을 알 수 있다.



방정식 $g(x) = 2$의 해는 $x = \alpha$ 뿐 이므로 (나) 조건에 의해 $f(1) = f(4) = \alpha$





$$f(x) = \frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\alpha-3) + b$$

$$f(1) = f(4) = \alpha$$

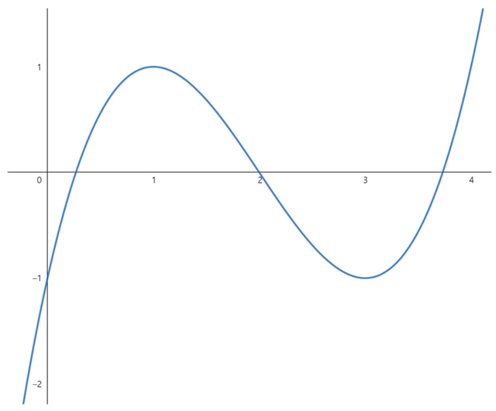
$$\frac{1}{2}(1-\alpha)^2(-\alpha-2) = \frac{1}{2}(4-\alpha)^2(1-\alpha)$$

$$\alpha = 1 \text{ or } 2$$

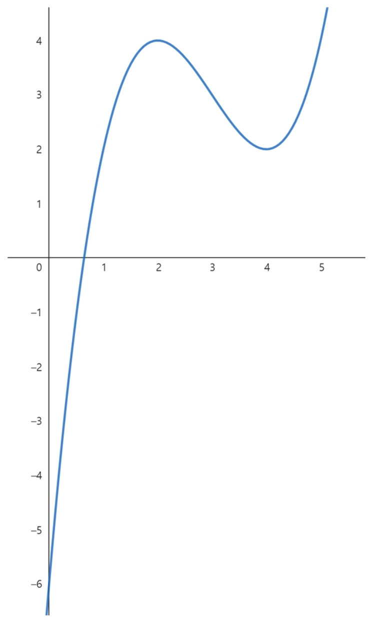
$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$$

$$\text{or } \frac{1}{2}(x-2)^2(x-5) + 4$$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$ 이면 $f(0) = -1$ 이므로 $g(-1) = 1$



$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2(x-5) + 4$ 이면 $f(0) = -6$ 이므로 $g(-6) = 0$



$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(x-4) + 1$$

$$f(5) = 9$$

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

${}_7C_5 \times 2^2 = 84$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$V(2X)=4\,V(X)=\frac{8n}{9}=40$

$n=45$

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $|a^2-b^2|=5$

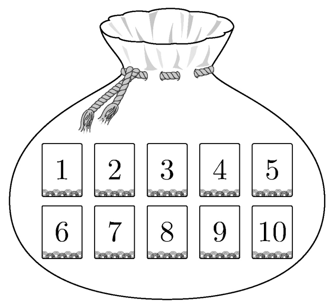
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$(a, b)=(2, 3)$ or $(3, 2)$

$2 \times {}_3H_4 = 30$

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



"가장 작은 수가 4이하이거나 7이상"의 여사건은

4보다 크고 7보다 작다 이므로

가장 작은 수가 5또는 6일 확률을

1에서 빼면 된다.

$$1-\frac{{}_5C_2+{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{13}{15}$$

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

$a = \overline{x_1} - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$
$c = \overline{x_2} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$

$1.34 = +1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$

$\sigma = 20$

$b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{20}{10} = 7.84$

28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

$\{1, 2, 3\}$
$f(5) = 3$, $f(1) = 1$
$2^3 - 1 = 7$

$\{1, 2, 4\}$
$f(5) = 4$, $f(1) = 1$
$2^3 - 1 = 7$

$\{1, 2, 4\}$
$f(5) = 4$, $f(1) = 1$
$2^3 - 1 = 7$

$\{1, 3, 4\}$
$f(1) = 1$
$2^4 - 2 = 14$

$\{2, 3, 4\}$
$f(5) = 3$
$3^4 - \{3 + (2^4 - 2) \times 2\}$
$= 50$

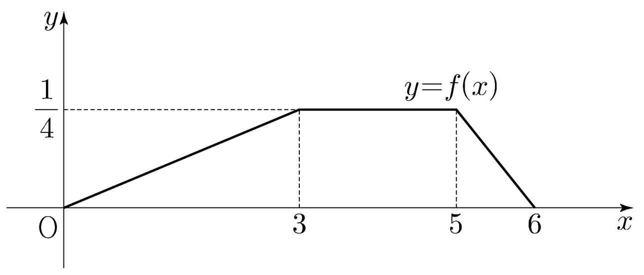
$f(5) = 4$

$3^4 - \{3 + (2^4 - 2) \times 2\}$
$= 50$

$7 + 7 + 14 + 100 = 128$

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$6k=2,\ k=\frac{1}{3}$

$P(2 \le Y \le 5)=1-P(2 \le X \le 5)$
$=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\times 1-\frac{1}{4}\times 2$
$=\frac{7}{24}$

31

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

5이상의 눈이 나오는 경우의 수를 a라 하면

$a_5+b_5=2a+(5-a)\ge 7$

$a \ge 2$

$$\frac{{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-{}_2C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)}{1-{}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5-{}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^4}$$
$=\frac{60}{131}$

191

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\dfrac{3}{n}}{1-\dfrac{2}{n^2}}=5$$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e　② $\dfrac{e}{2}$　③ $\dfrac{e}{3}$　④ $\dfrac{e}{4}$　⑤ $\dfrac{e}{5}$

$$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$$

$$f'(2)=\frac{e}{4}$$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\frac{a_1-a_2}{1-r^2}=3, \ \frac{a_1^2}{1-r^2}=6$$

$$a_1-a_2=\frac{a_1^2}{2}, \ 1-r=\frac{a_1}{2}$$

$$\therefore \ \frac{a_1}{1-r}=2$$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx=\left[\frac{1}{3}\ln\left(x^3+3x^2+1\right)\right]_0^1$$

$$=\frac{\ln 5}{3}$$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$
④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

$$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$$

$$\left(\frac{t^2}{2},\ \frac{t^4-\frac{\ln t}{4}}{2}\right)$$

$$\int_1^e\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^4+\frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e=\frac{c^4}{2}-\frac{3}{8}$$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

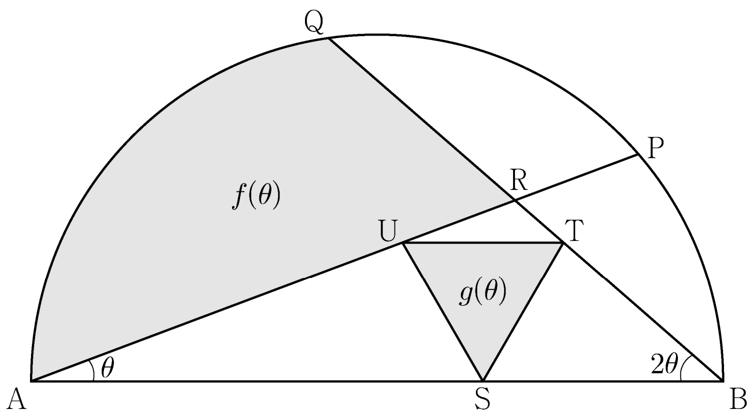
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x)=3f'(x)-4\sin f(x)\times f'(x)$ **에서**
$=f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

1) $0<x<1$**에서 극소를 갖는 점 3개**
2) $x=1$ **에서 극소**
3) $1<x<2$ **에서 극소를 갖는 점 3개**

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



정삼각형 STU의 한변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\overline{AS}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}=\frac{a}{\sin\theta},\quad \frac{\overline{SB}}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}=\frac{a}{\sin 2\theta}$$

$$a=\frac{2}{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}{\sin 2\theta}}$$

$$g(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\theta\right)}{\sin\theta}+\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-2\theta\right)}{\sin 2\theta}}\right)^2$$

$$\frac{2}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{RB}}{\sin\theta}$$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 4\theta+\frac{1}{2}\times\sin(\pi-4\theta)-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2\sin\theta\sin 2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$g(2)=2,\ f(2)=2$

$g(4)=4,\ f(4)=4$

$g(8)=8,\ f(8)=8$

$$\int_1^8 xf'(x)dx=\int_1^8 g(x)dx$$

$$\int_1^2 g(x)dx=4-1-\frac{5}{4}=\frac{7}{4}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 g(2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_2^4 g(t)dt=\frac{5}{4},\quad \int_2^4 g(t)dt=5,\quad \int_2^4 f(x)dx=16-4-5=7$$

$$\int_2^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_2^4 g(2x)dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_4^8 g(t)dt=7,\quad \int_4^8 g(t)dt=28$$

$$\int_1^8 g(x)dx=\frac{7}{4}+5+28=\frac{139}{4}$$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2,\ 1,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

25. 좌표평면에서 두 직선

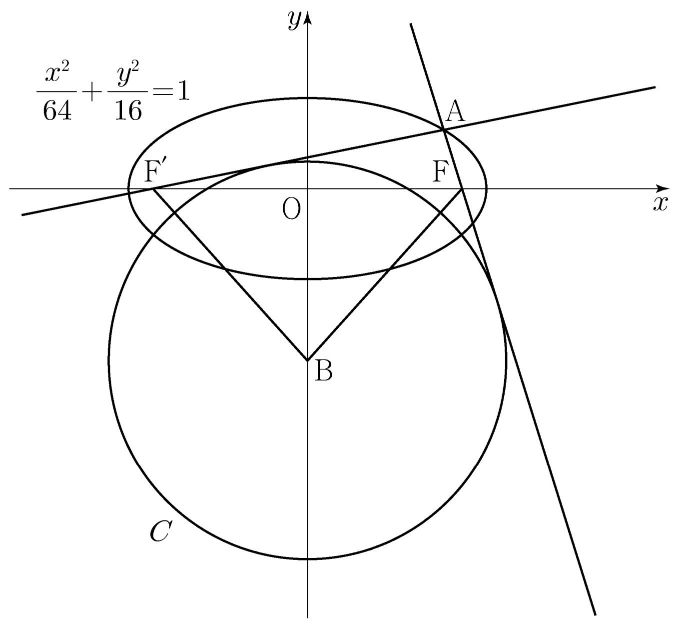
$$\frac{x+1}{2}=y-3, \quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

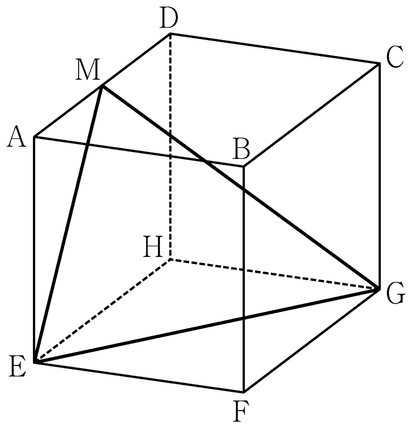
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



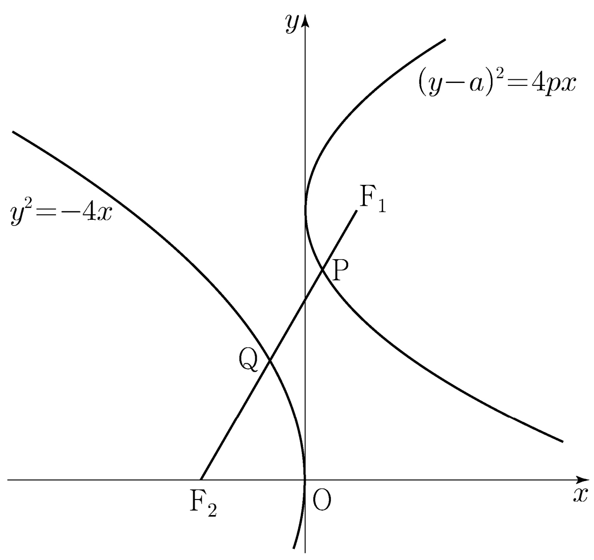
27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD - EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 F_1F_2가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{F_1F_2}=3$, $\overline{PQ}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7



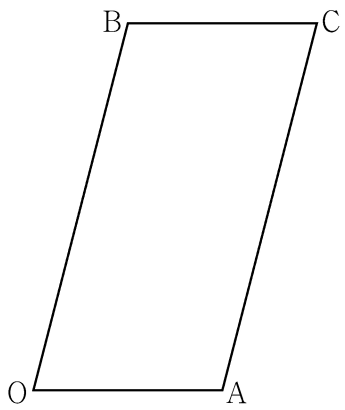
단답형

29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

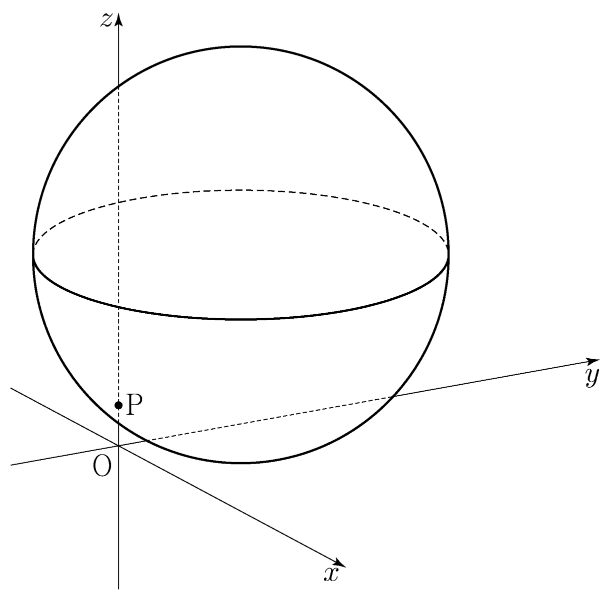
점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.