제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}=2^2=4$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ 의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f'(x)=4x,\ f'(2)=8$

3. $\sin(\pi-\theta)=\dfrac{5}{13}$ 이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$ ② $-\dfrac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

$\cos\theta=-\dfrac{12}{13}$

$\tan\theta=-\dfrac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-a=a^2-6$

-1

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$a_5 = -4d,\ a_{10} = d = -3$

$a_2 = -7d = 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(0) = k = 9,\ f(2) = 8 - 12 + 9 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{10} S_k - S_{10} = \sum_{k=1}^{9} S_k$$
$$= \sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$y=-x+3$

$-\alpha+3=\alpha^4+3\alpha+a$

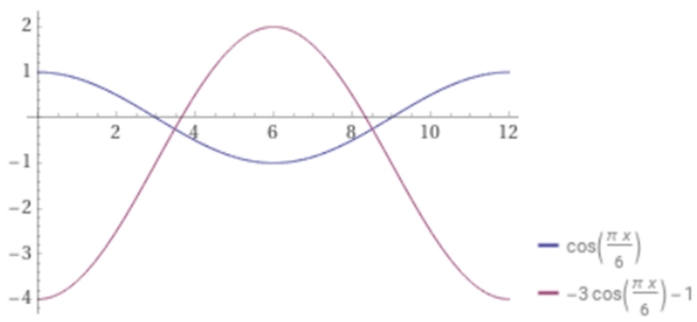
$-1=4\alpha^3+3,\ \alpha=-1,\ a=6$

9. 닫힌구간 $[0,\ 12]$ 에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\alpha_1,\ \alpha_2$라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 $\beta_1,\ \beta_2$라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$ 의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$\alpha_1=2,\ \alpha_2=10$

$k=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=\frac{2\pi}{3}$ or $\frac{4\pi}{3}$

$|\beta_1-\beta_2|=4$

10. 수직선 위의 점 $\mathrm{A}(6)$과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at\quad(a>0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\int_0^2(3t^2+at)\,dt=\left[t^3+\frac{1}{2}at^2\right]_0^2$

$=8+2a$

$|8+2a-6|=10$

$a=4$

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$$3^{\frac{f(n)}{8}} \times \left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right) = -9$$

$$3^{\frac{f(n)}{8}} = 3,\ f(n) = 8$$

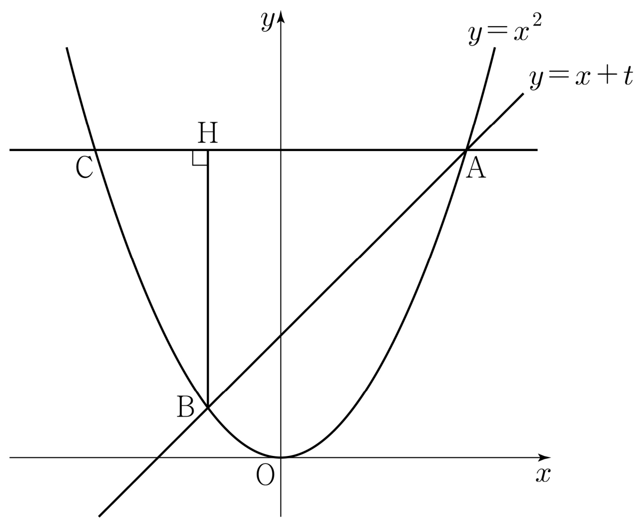
$$f(1) = f(3) = 8$$

$$k-1 = 8,\ k = 9$$

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\overline{\mathrm{AH}} - \overline{\mathrm{CH}}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



점 B의 x좌표를 α, 점 A의 x좌표를 β 라 하면

$\overline{AH} = \beta - \alpha,\ \overline{CH} = \alpha + \beta$

$\overline{AH} - \overline{CH} = -2\alpha$

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$

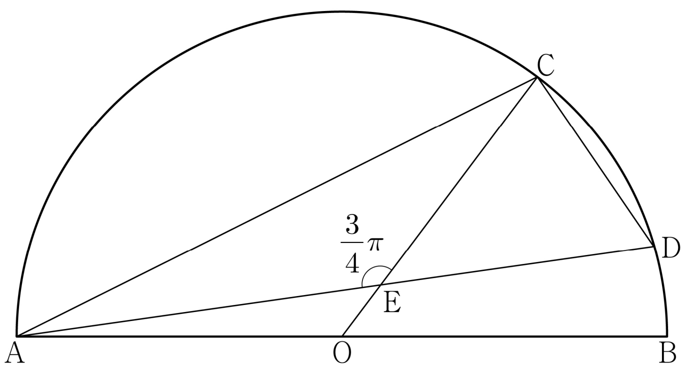
$\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$

$= \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{4t}{t} \times \dfrac{1}{\sqrt{1+4t}+1} = 2$

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$ 의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

$\overline{CD}^2=16+18-24\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=10$

$\overline{CD}=\sqrt{10}$

$\angle CAD=\theta$ **라 하면** $\frac{3\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{\sqrt{10}}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\frac{4}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin\frac{3}{4}\pi}$, $\overline{AC}=4\sqrt{5}$

$\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$

$0\le x\le 1,\ f(x)\ge 0$

$x<0,\ f(x)<0$

$g(-1)<0$

ㄴ. $g(-1)>0$ **이므로** $\int_{-1}^0 f(x)dx>\int_0^1|f(x)|dx$**이므로 참**

ㄷ. $g(-1)=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 x(x-a)(x-1)dx$ **이므로**

$=2\int_0^1-(a+1)x^2dx$

$=\frac{-2(a+1)}{3}>1,\ a<-\frac{5}{2}$

$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=2\int_0^1 f(x)dx$

$=2\left(\frac{1}{4}-\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}\right)=\frac{2a-1}{6}<-1$

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
> (단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)
>
> (나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\dfrac{1}{2}a_n & (|a_n|\geq 5) \end{cases}$$
> 이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$a_4=r,\ a_8=r^2\ \ 0<|r|<1$

$a_5=r+3,\ a_6=r+6,\ a_7=-\dfrac{1}{2}r-3,\ a_8=-\dfrac{1}{2}r=r^2$

$r=-\dfrac{1}{2}=a_4,\ a_3=-\dfrac{7}{2},\ a_2=7,\ a_1=-14$

$a_5=\dfrac{5}{2},\ a_6=\dfrac{11}{2},\ a_7=-\dfrac{11}{4},\ a_8=\dfrac{1}{4}$

$a_9=\dfrac{13}{4},\ a_{10}=\dfrac{25}{4},\ a_{11}=-\dfrac{25}{8},\ a_{12}=-\dfrac{1}{8}$

$\therefore p=26,\ a_1=-14$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$4<x$

$x^2-8x+16=x+2$
$x^2-9x+14=0$

$x=7$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$

$f(2)=16$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$10c = 65 + 5c,\ c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

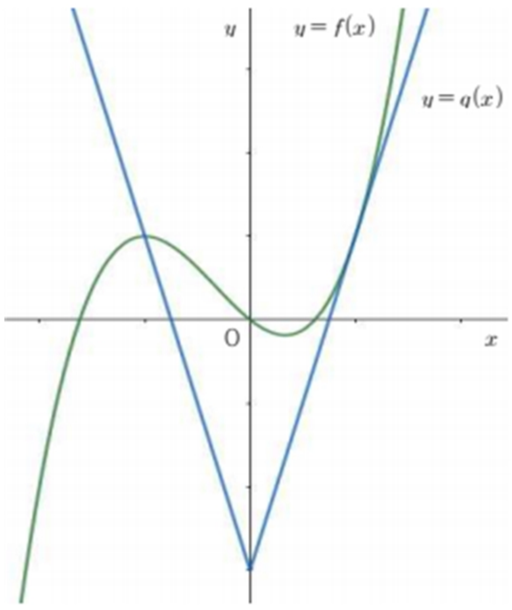
$-5 < -k < 0$

$0 < k < 5$

20. 상수 $k\ (k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x,\quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,
두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자.
$30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]



접점의 x좌표를 α라 하면 $3\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 4,\ \alpha = 1,\ k = -3$

$x^3 + x^2 - x = -4x - 3,\ x = -1$

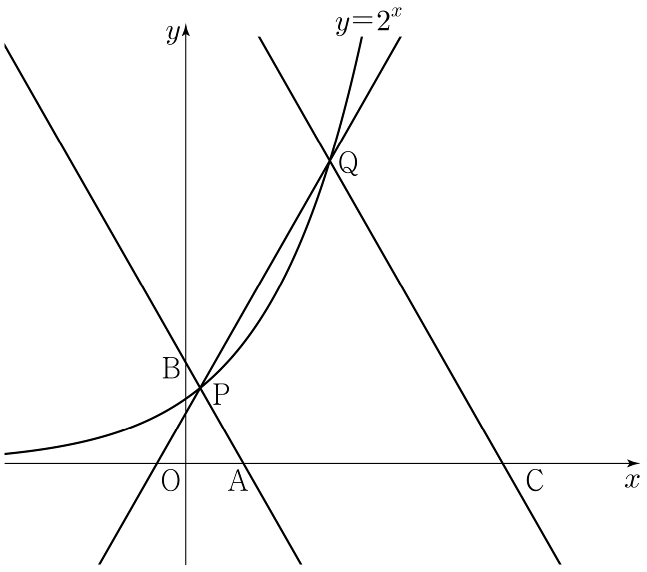
$$\int_{-1}^{0} (x^3 + x^2 + 3x + 3)\,dx + \int_{0}^{1} (x^3 + x^2 - 5x + 3)\,dx$$
$$= \frac{80}{3}$$

$30S = 80$

21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\,\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\,\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



$\overline{AB}=4\overline{PB}$이므로 점 A의 x좌표는 $4a$

삼각형의 닮음에 의해 $P(a,\ 2^a)$, $3\times\frac{4}{3}\times2^a=2^{a+2}$ 이므로

$Q(a+2,\ 2^{a+2})$

$m=\frac{2^{a+2}-2^a}{2}$

$-m=\frac{-2^a}{3a}$, $\frac{2^{a+2}-2^a}{2}=\frac{2^a}{3a}$, $a=\frac{2}{9}$, $b=\frac{20}{9}$

22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\ge t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(x)=(x-3)^2(x-3-3k)+8$ 이라하자.

$f(\alpha)=0\ (\alpha<3)$이라 하면 $h(t)$는 $t=\alpha$ 에서 불연속

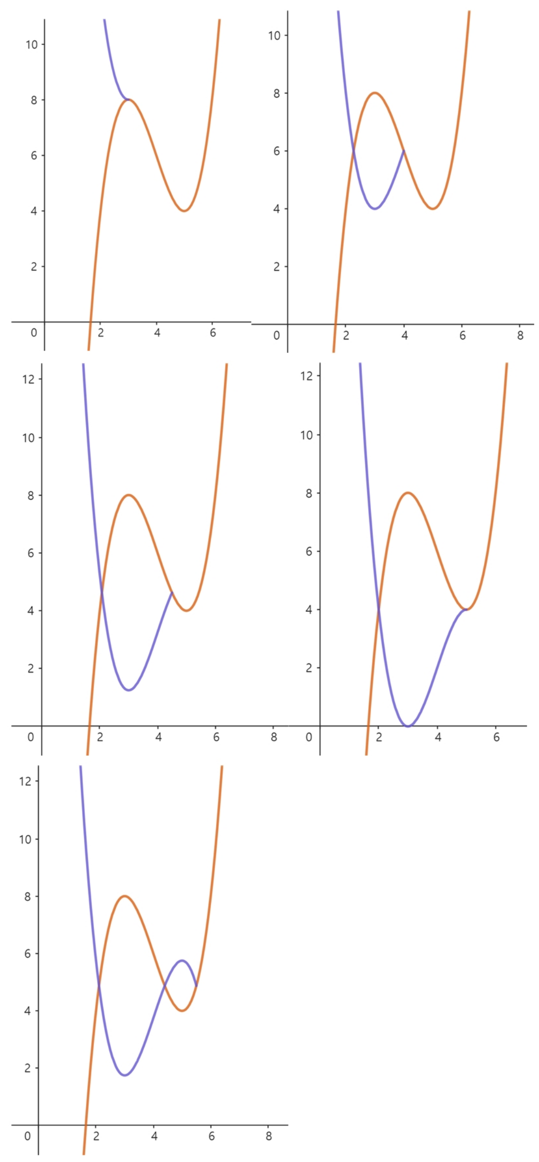
$f(3+2k)>4$ 이면 $h(t)$가 불연속이 되는 점이 $t=\alpha$이외에는 없다.

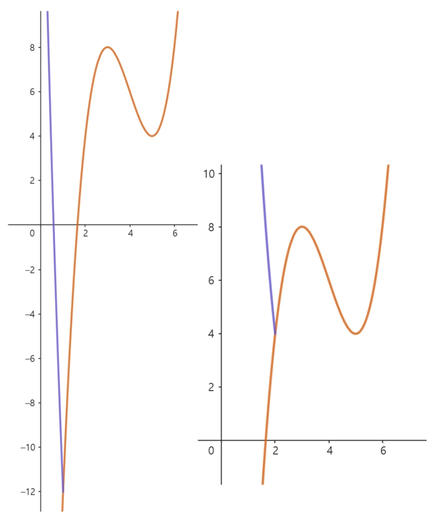
$f(3+2k)=4$ 이면 $h(t)$가 불연속이 되는 점은 $t=\alpha,\ t=3+2k$

$f(3+2k)<4$ 이면 $h(t)$가 불연속이 되는 점은 3개 이상이다.

$\therefore k=1,\ f(x)=(x-3)^2(x-6)+8$

$f(8)=58$





＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

$_6C_2 \times 2^4 = 240$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A \cup B) = 1,\quad \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$P(A \mid B) = P(B \mid A)$

$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$P(A) = P(B)$

$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

$P(A) = \frac{5}{8}$

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

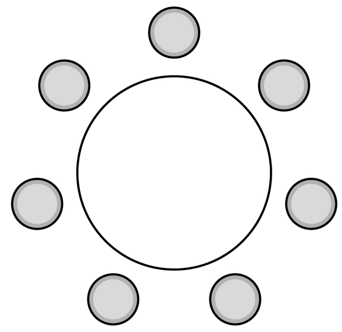
① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

$P(8.9 \le X \le 9.4) = P(19 \le Y \le k)$
$P\left(-\frac{1}{4} \le Z \le 1\right) = P(-1 \le Z \le k-20)$

$k-20 = \frac{1}{4}$, $k = 20.25$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



$1 - \frac{4 \times 3 \times 4!}{6!} = \frac{3}{5}$

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

$E(X)=\dfrac{5+4a}{10}$, $E(X^2)=\dfrac{5+4a^2}{10}$

$V(X)=\dfrac{5+4a^2}{10}-\left(\dfrac{5+4a}{10}\right)^2$

$\dfrac{5+4a^2}{10}-\left(\dfrac{5+4a}{10}\right)^2=\left(\dfrac{5+4a}{10}\right)^2$

$a=10$

$E(X)=\dfrac{45}{10}$, $E(X^2)=\dfrac{405}{10}$

45

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

5는 뽑고 10은 안뽑는 경우

$3\times3+1=10$

5는 안뽑고 10은 뽑는 경우

${}_3C_2+{}_2C_1\times{}_3C_1=9$

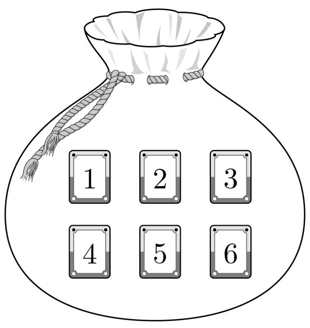
5와 10 모두 뽑는 경우

3

$\dfrac{10+9+3}{{}_{10}C_3}=\dfrac{11}{60}$

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$a+b+c+d=7$

7, 0, 0, 0
6, 1, 0, 0

${}_4H_7-4-\frac{4!}{2!}=104$

$\frac{104}{6^4}=\frac{13}{162}$

$a+b+c+d=11$
$6+3+1+1$
$6+2+2+1$
$5+4+1+1$
$5+3+2+1$
$5+2+2+2$
$4+4+2+1$
$4+3+3+1$
$4+3+2+2$
$3+3+3+2$

$\frac{4!+6\times\frac{4!}{2!}+2\times\frac{4!}{3!}}{6^4}=\frac{13}{162}$

175

30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f:X\to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f\circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $n(A)\leq 3$
(나) $n(A)=n(B)$
(다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)\neq x$이다.

$n(A)=n(B)=2$

${}_5C_2$

2^3

80

$n(A)=n(B)=3$

${}_5C_3$

2×3^2

180

$80+180=260$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

24. $\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)dx$ 의 값은? [3점]

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^{\pi} x\sin x dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx$

$= \pi$

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

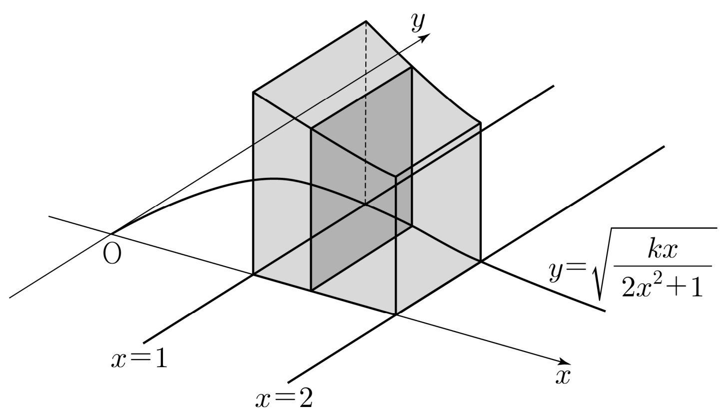
$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{n\to\infty}a_n=10$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n}+2}=5$$

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]

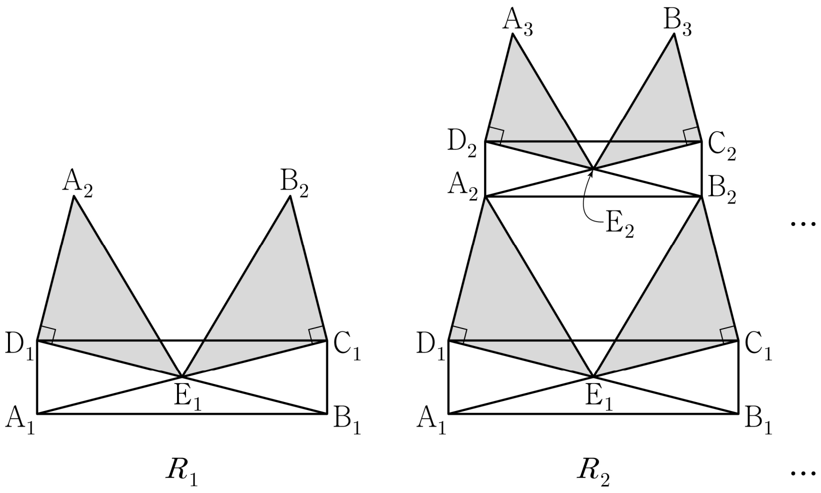


① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}dx=\left[\frac{k}{4}\ln(2x^2+1)\right]_1^2=\frac{k\ln 3}{4}=2\ln 3$$

$k=8$

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자.
$\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다.
두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2

① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

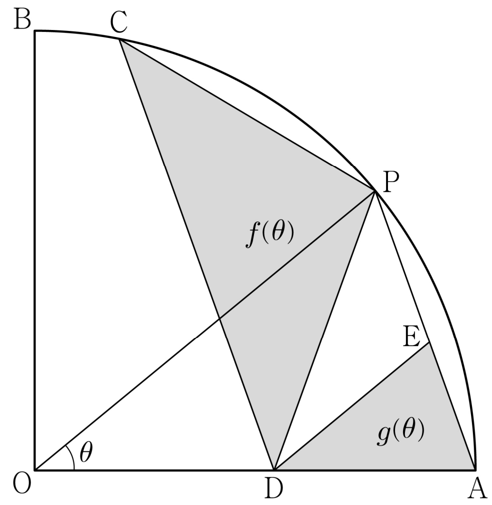
$$S_1=\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$$

$$\overline{A_2B_2}=4-\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}\times 2=3$$

길이비는 4 : 3, **넓이비는** 16 : 9

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{2}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{7}$$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$$\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=2\sin\frac{\theta}{2},\ \overline{AD}=4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin\theta\times 16\sin^4\frac{\theta}{2}$$

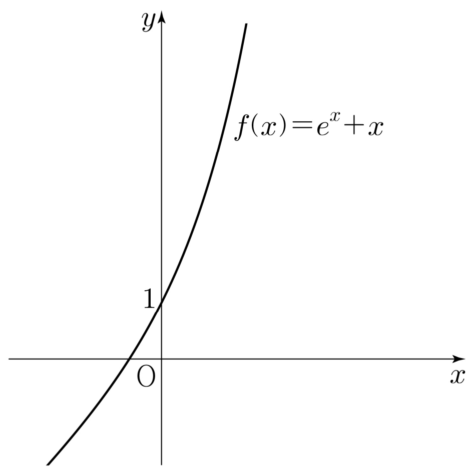
$\angle APC=\pi-\theta$, $\angle APD=\theta$
$\therefore\ \angle CPD=\pi-2\theta$

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\sin(\pi-2\theta)$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\frac{1}{2}$$

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



$$\frac{f(s)}{s-t}\times f'(s)=-1,\ f(s)=g(t),\ t=h(f(s))$$

$$\frac{f(s)}{s-h(f(s))}\times f'(s)=-1$$

$$f(s)f'(s)=h(f(s))-s$$

$$(e^s+s)(e^s+1)=h(e^s+s)-s$$

$$(e^s+1)^2+(e^s+s)e^s=h'(e^s+s)\times(e^s+1)-1$$

$$5=h'(1)\times 2-1$$
$$h'(1)=3$$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)\ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x\le -3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f(-3)$이다.
>
> (나) $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$이다.

$\int_4^5 g(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)\ge 0$ 이므로
조건 (나)에서 $x>-3$일 때, $f'(x)\ge 0$이고
$g(3)\{f(0)-f(0)\}^2=f'(0)=0$임을 알 수 있다.
$\therefore f'(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

조건 (가)와 (나)에 의해 $f'(-3)=0$임을 알 수 있다.

$\therefore f'(x)=4x^2(x+3)$

$\therefore f(x)-f(0)=x^4+4x^3$

$$\int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx$$
$$=\int_1^2\frac{f'(x)}{\{f(x)-f(0)\}^2}dx$$
$$=\int_{f(1)-f(0)}^{f(2)-f(0)}\frac{1}{t^2}dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_5^{48}=\frac{43}{240}$$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

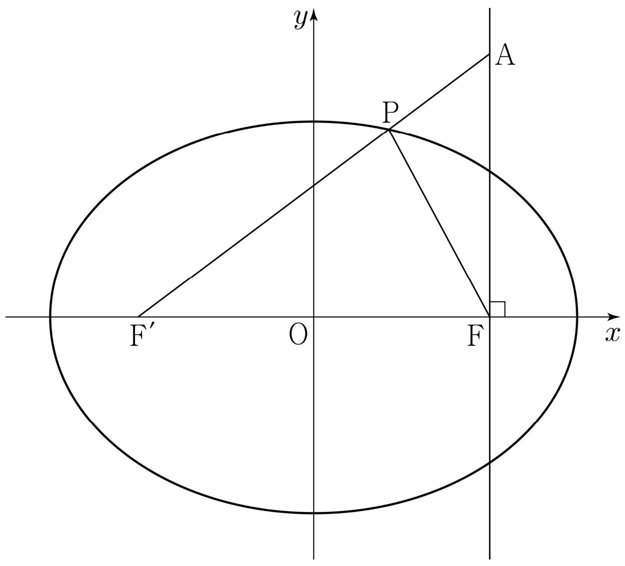
① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{\mathrm{AF'}}=5$, $\overline{\mathrm{AF}}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.) [3점]

① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10



26. 좌표평면 위의 점 A(3, 0)에 대하여

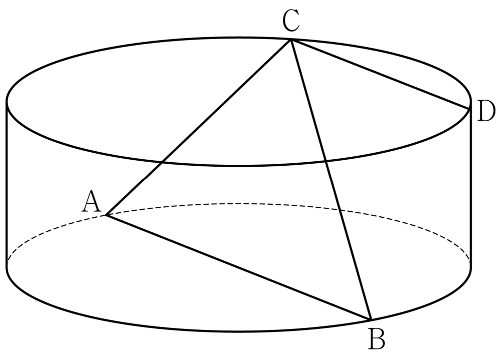
$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{4}{5}$　③ 1　④ $\frac{6}{5}$　⑤ $\frac{7}{5}$

27. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는? [3점]

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
(나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.



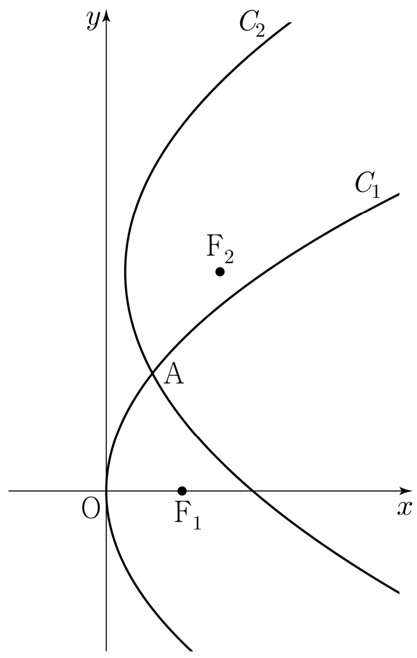
① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

28. 실수 $p\,(p \geq 1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선

$$C_1 : y^2 = 4x, \quad C_2 : (y-3)^2 = 4p\{x - f(p)\}$$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{AF_1} = \overline{AF_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$



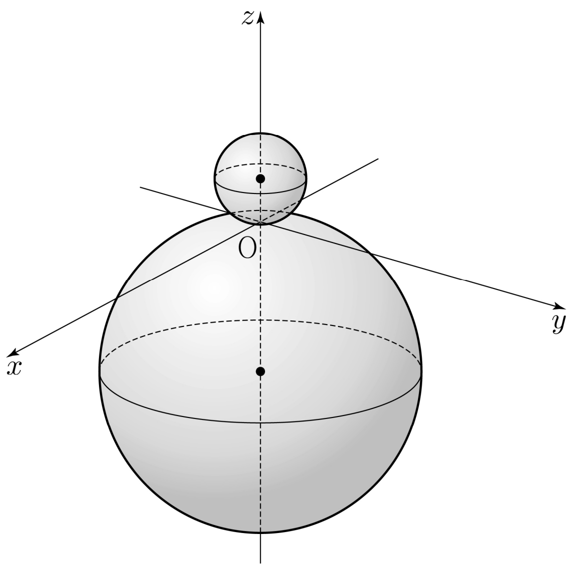
단답형

29. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4, \quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5}, 0, 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2, 2)$, $\mathrm{B}(2, 2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}| \geq 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1, 0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{u}) \geq 0$이다.
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.