제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$

$f'(x)=2x-2$

$f'(3)=4$

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$

$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$f(1)=4-f(1),\ f(1)=2$

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$

$g'(1)=3f(1)+2f'(1)=12$

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0
④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{7}=\tan\theta$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$x=a$

$\left|\log_2\frac{a}{4}-(-\log_2 a)\right|=4$

$\log_2\frac{a^2}{4}=4$, $\frac{a^2}{4}=16$, $a=8$

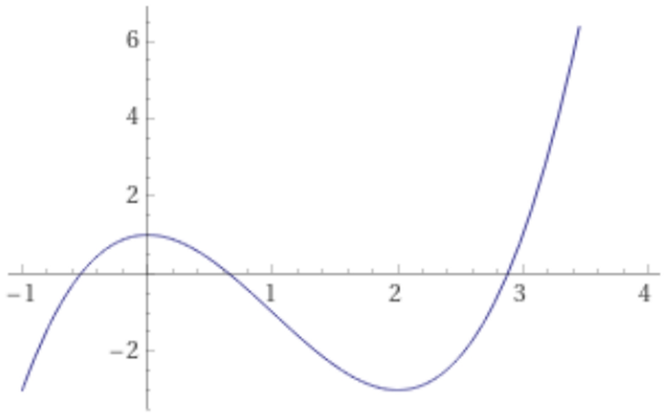
8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3-3x^2+1=-k$

$-k=-3,\ k=3$

$y=x^3-3x_2+1$의 그래프는 다음과 같다



9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=2n+1$$

$$\frac{1}{a_1}=3,$$

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\ (n\geq 1)$$

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$=\frac{10}{21}$$

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

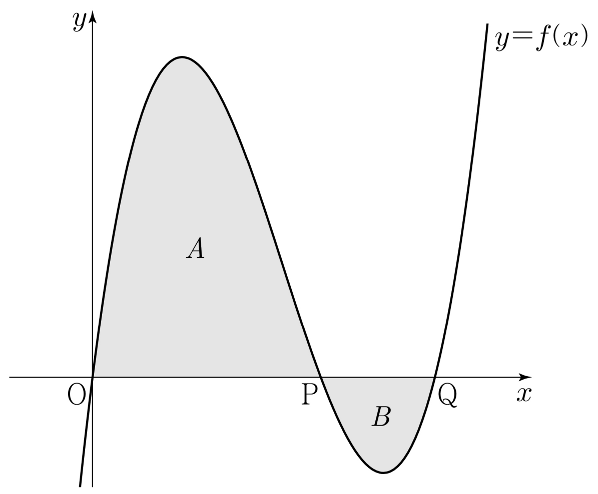
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q$(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

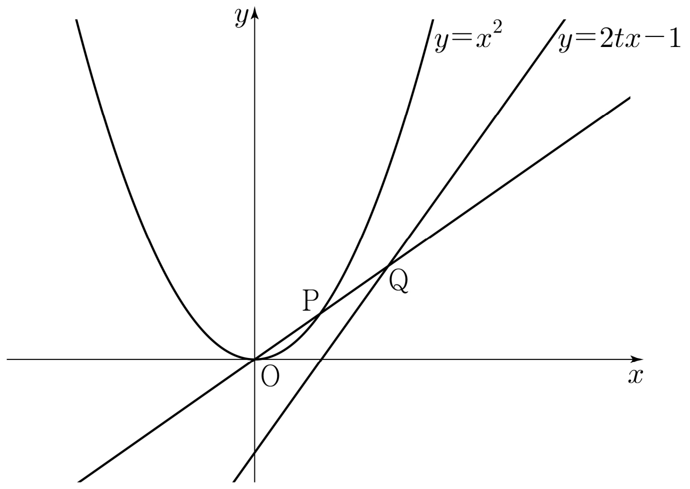


$$k\int_0^3 x(x-2)(x-3)dx=3$$

$$\int_0^3 x(x-2)(x-3)dx=\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$
$$=\frac{9}{4}$$

$$k=\frac{4}{3}$$

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

$P(\alpha,\ \alpha^2)$

$2\alpha=2t,\ \alpha=t$

$P(t,\ t^2)$

$l\ :\ y=tx,\ Q\left(\frac{1}{t},1\right)$

$$\lim_{t\to1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$
$$=\lim_{t\to1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}{1-t}=2\sqrt{2}$$

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\ge1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\},\quad B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

$a_1=-4-d,\ a_2=-4,\ a_3=-4+d,$
$a_4=-4+2d,\ a_5=-4+3d$

$b_1=-8-d,\ b_2=-8+d,\ b_3=-8+3d$
$b_4=-8+5d,\ b_5=-8+7d$

$-4-d=-8+d,$
$-4+d=-8+3d,$
$-4+3d=-8+5d,\ \ d=2,\ a_{20}=32$

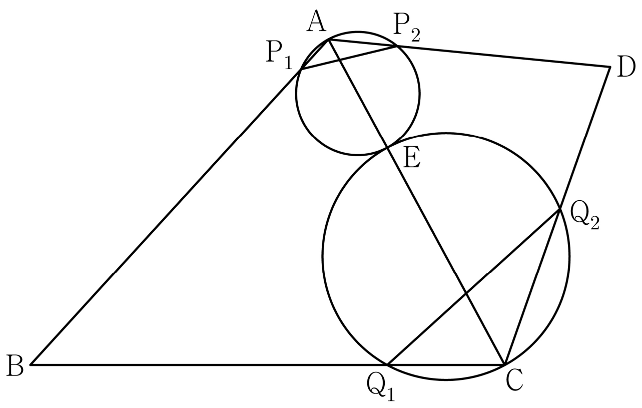
$-4-d=-8+3d,$
$-4+d=-8+5d,$
$-4+3d=-8+7d,\ \ d=1,\ a_{20}=14$

$a_{20}=32$ or 14

13. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=3,\ \overline{\mathrm{CD}}=2,\ \cos(\angle\mathrm{BCD})=-\frac{1}{3},\ \angle\mathrm{DAB}>\frac{\pi}{2}$$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1:2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 $\mathrm{Q_1}$, $\mathrm{Q_2}$라 하자.
$\overline{\mathrm{P_1P_2}}:\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{AD}}$의 값은? (단, $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AD}}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

$$\frac{\overline{P_1P_2}}{\sin(\angle BAD)}=2r_1,\ \frac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin(\angle BCD)}=2r_2$$

$r_1 : r_2 = 1 : 2$

$$\frac{\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BAD)}=\frac{\overline{Q_1Q_2}}{\overline{P_1P_2}}\times\frac{r_1}{r_2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}$$

$$\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{2}}{3},\ \sin(\angle BAD)=\frac{4}{5}$$

$$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AB}\times\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$=3^2+2^2-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{AB}\times\sin(\angle BAD)=2$$

$$\overline{AB}\times\overline{AB}=5$$

$$\overline{AB}^2+\overline{CD}^2=11$$

$$(\overline{AB}+\overline{CD})^2=\overline{AB}^2+\overline{CD}^2+2\times\overline{AB}\times\overline{AB}=21$$

$$\overline{AB}+\overline{CD}=\sqrt{21}$$

14. 실수 $a\,(a\geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

$a=1$ or $\frac{1}{2}$이므로 위치변화량이 최대가 되려면 $a=1$일 때이다.

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=-2\int_0^1 -t(t-1)^2(t-2)dt$$
$$=-2\left[\frac{1}{5}t^5-t^4+\frac{5}{3}t^3-t^2\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{15}$$

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

$a_1 = k,\ a_2 = -2,\ a_3 = 2-k$

$k=1$
$a_3 = 1,\ a_4 = -6, a_5 = 1,\ a_6 = -10$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$

$k=2$
$a_3 = 0, a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 = 0$

$k=3$
$a_3 = -1,\ a_4 = 2,\ a_5 = -9,\ a_6 = -2$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$

$k=4$
$a_3 = -2,\ a_4 = 0$

$k=5$
$a_3 = -3,\ a_4 = -2,\ a_5 = 1,\ a_6 < 0$

$k=6$
$a_3 = -4,\ a_4 = -4,\ a_5 = -2,\ a_6 = 2$

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$

$k=7$
$a_3 = -5,\ a_4 = -4,\ a_5 = -3,\ a_6 = 0$
$k=8$
$a_3 = -6,\ a_4 = -8,\ a_5 = -8,\ a_6 = -6$
$k=9$
$a_3 = -7,\ a_4 = -10,\ a_5 = -10,\ a_6 = -9$
$k=10$
$a_3 = -8,\ a_4 = -12,\ a_5 = -14,\ a_6 = -14$

$k \ge 8$
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 > 0$

단답형

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$x - 6 \le -2x$

$x \le 2$

$1 + 2 = 3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 - 1$이고 $f(0) = 3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4 - x + 3$

$f(2) = 33$

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

$f(1)=-2,\ 2a+b=-2$

$f'(1)=0$
$f'(x)=3ax^2+b,\ 3a+b=0$

$a=2,\ b=-6$

$f'(x)=6x^2-6$
$f(x)=2x^3-6x+2$

$f(-1)=6$

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

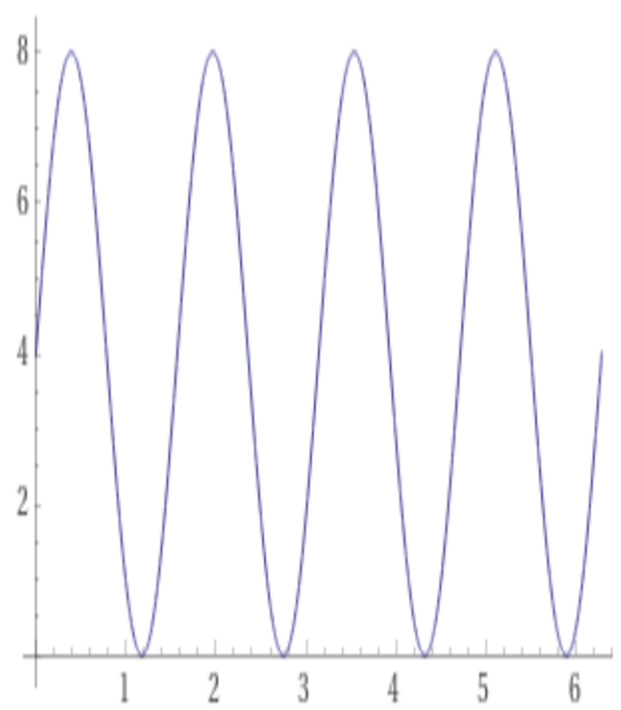
> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이다.
> (나) $0\le x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$-a+8-a=0,\ a=4$

$f(x)=4\sin bx+4$

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2},\ b=4$

$a+b=8$



20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x)\ge g(4)$이고 $|g(x)|\ge|g(3)|$이다.

$g(x)\ge g(4)$ 이므로

$f(x)=(x-4)(x-\alpha)$

$|g(x)|\ge|g(3)|$ 이므로

$\int_0^3 f(x)dx=0$

$\int_0^3\{x^2-(4+\alpha)x+4\alpha\}dx$
$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{4+\alpha}{2}x^2+4\alpha x\right]_0^3=0$

$\alpha=\frac{6}{5}$

$f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$

$f(9)=5\left(9-\frac{6}{5}\right)=45-6=39$

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C\neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

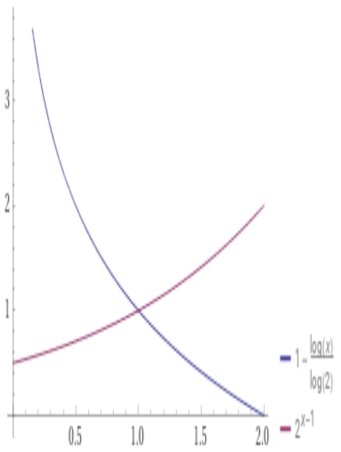
<보 기>

ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t)\geq t$이다.

$t=1$ 이므로 ㄱ. 참

$y=1-\log_2 x,\ y=2^{x-1}$

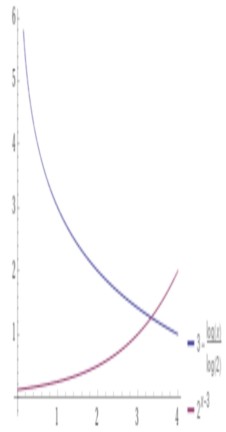
$(1,\ 1),\ (1,\ 1)$



$t=3$

$y=3-\log_2 x,\ y=2^{x-3}$

$(2,\ 1),\ (3,\ 1)$



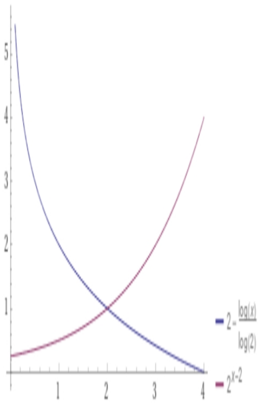
참

ㄴ.

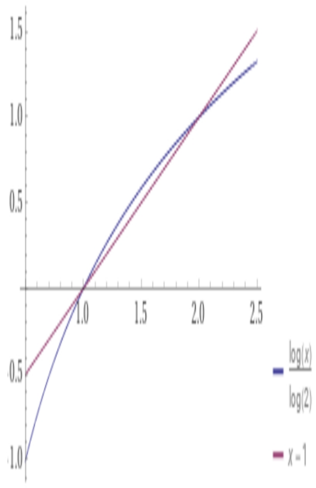
$t=2$

$y=2-\log_2 x,\ y=2^{x-2}$

$(2,\ 1),\ (2,\ 1)$



ㄷ. ㄱ. ㄴ에서 $t-\log_2 x$는 감소함수이고 2^{x-t}는 증가함수 이므로 $f(t)\geq t$이려면 $t-\log_2 t\geq 2^{t-t}$, $t-1\geq \log_2 t$ 를 만족하면 된다.



구간 $(1,\ 2)$에서 $t-1\leq \log_2 t$ 이므로 거짓

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

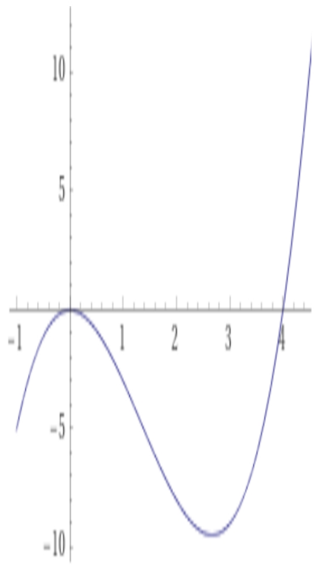
이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

함수 $f(x)$에 대하여
$$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

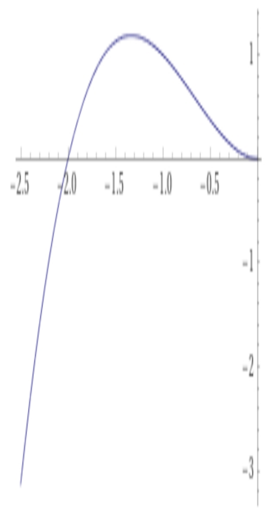
$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$과 $\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$는 두 점 사이의 기울기 이므로

문제의 조건을 만족시키는 모든 정수 k값의 곱이 -12이므로 음수인 구간에서 문제의 조건에 맞는 정수 k가 존재해야 한다.

$f(x)=x^3-2ax^2$에서 $a>0$이면



이고 음수인 구간의 두 점 사이의 기울기는 항상 양수이므로 문제의 조건에 해당하는 음의 정수 k가 존재할 수 없다.



$a=-1$이면 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극댓값을 가지므로 문제의 조건에 해당하지 않는다.

$\therefore\ a=-2$

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

$f'(10)=380$

선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, b, c, d를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 50 ② 55 ③ 60 ④ 65 ⑤ 70

$\frac{5!}{2!}=60$

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{9},\quad \mathrm{P}(B^C)=\frac{7}{18}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{5}{9}$ ② $\frac{11}{18}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{13}{18}$ ⑤ $\frac{7}{9}$

$P(A\cup B)=P(A\cap B^c)+P(B)$
$=\frac{1}{9}+\left(1-\frac{7}{18}\right)=\frac{13}{18}$

25. 흰색 손수건 4장, 검은색 손수건 5장이 들어 있는 상자가 있다. 이 상자에서 임의로 4장의 손수건을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 4장의 손수건 중에서 흰색 손수건이 2장 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{9}{14}$ ④ $\frac{5}{7}$ ⑤ $\frac{11}{14}$

$$1-\frac{{}_5C_4+{}_4C_1\times{}_5C_3}{{}_9C_4}$$
$$=\frac{9}{14}$$

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

$${}_6C_0\times{}_7C_2\times(-1)^6(2)^2$$
$$+{}_6C_1\times{}_7C_1\times(-1)^5(2)^1$$
$$+{}_6C_2\times{}_7C_0\times(-1)^4(2)^0$$
$$=15$$

27. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. $a\times b$가 4의 배수일 때, $a+b\leq 7$일 확률은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$a=1, b=4$ 1가지, 1가지
$a=2, b=2$ or 4 or 6 3가지, 2가지
$a=3, b=4$ 1가지, 1가지
$a=4, b=1, 2, \cdot\cdot\cdot, 6$ 6가지, 3가지
$a=5, b=4$ 1가지, 0가지
$a=6, b=2$ or 4 or 6 3가지, 0가지

$\frac{7}{15}$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\rightarrow X$의 개수는? [4점]

> (가) $f(1)\times f(3)\times f(5)$는 홀수이다.
> (나) $f(2)<f(4)$
> (다) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

치역의 원소 중 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우
$_3C_1$**가지**

치역의 원소 중 홀수가 2개, 짝수가 1개인 경우
$_3C_2\times{}_2C_1\times(2^3-1)\times 2$

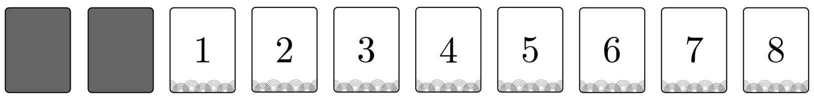
치역의 원소 중 홀수가 3개인 경우
$3\times(3^3-2^3)$

144

단답형

29. 그림과 같이 2장의 검은색 카드와 1부터 8까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 8장의 흰색 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 왼쪽에서 오른쪽으로 일렬로 배열할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 검은색 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

> (가) 흰색 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽에서 오른쪽으로 배열되도록 카드가 놓여 있다.
> (나) 검은색 카드 사이에는 흰색 카드가 2장 이상 놓여 있다.
> (다) 검은색 카드 사이에는 3의 배수가 적힌 흰색 카드가 1장 이상 놓여 있다.



검은색 카드 사이에 3의 배수 중 3만 있으면서
문제의 조건에 맞는 경우의 수는
$3\times3-1$

검은색 카드 사이에 3의 배수 중 6만 있으면서
문제의 조건에 맞는 경우의 수는
$3\times3-1$

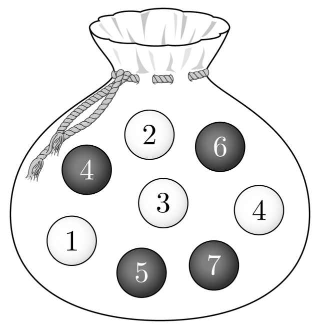
검은색 카드 사이에 3의 배수 중 3, 6이 모두 있는 경우
3×3

25

30. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

> 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어
> 꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻고,
> 꺼낸 공이 서로 같은 색이면 꺼낸 두 공에 적힌 수의 곱을 점수로 얻는다.

이 시행을 한 번 하여 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$$\frac{4\times4+6-1+2}{{}_8C_2}=\frac{23}{28}$$

51

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}=\frac{5}{2}$$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$$\frac{\dfrac{6t}{t^2+1}}{\dfrac{5(t^2+1)-5t\times 2t}{(t^2+1)^2}}$$

$t=2$ 대입하여 계산하면

-4

25. $\lim_{x \to 0} \frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1} = 16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1} = 16$$

$b = 3$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1} = \frac{8\ln 2^a}{\ln 8} = \frac{8a}{3} = 16$$

$a = 6$

$a + b = 9$

26. x에 대한 방정식 $x^2 - 5x + 2\ln x = t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x} = 0$$

$$2x^2 - 5x + 2$$
$$= (2x-1)(x-2)$$

$$t_1 = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} - 2\ln 2$$
$$t_2 = f(2) = -6 + 2\ln 2$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{33}{4}$$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

$y-\sin t=\cos t(x-t)$

$\tan\theta_1=\cos t,\ \tan\theta_2=-1$

$\tan\theta=\left|\tan(\theta_1-\theta_2)\right|=\frac{\cot+1}{1-\cos t}$

$\lim_{t\to\pi-}\frac{1}{(\pi-t)^2}\times\frac{\cot+1}{1-\cos t}$

$\pi-t=x$

$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^2}\times\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1}{4}$

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
> 이다.
>
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$　② $-\frac{7}{64}$　③ $-\frac{5}{32}$　④ $-\frac{13}{64}$　⑤ $-\frac{1}{4}$

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$
$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$

$\{f(0)-f(2)\}\{f(0)+f(2)\}+2\{f(0)-f(2)\}=0$

$\{f(0)-f(2)\}\{\{f(0)+f(2)\}+2\}=0$

$f(0)+f(2)=-2,\ f(0)=-\frac{1}{2},\ f(2)=-\frac{3}{2}$

$-\frac{3}{4}=a+b$

$\{f(2-x)\}^2+2f(2-x)=\{f(x)\}^2+2f(x)$

$\{f(2-x)-f(x)\}\{f(2-x)+f(x)+2\}=0$

$f(0)\neq f(2),\ f(2-x)-f(x)\neq 0$

$f(2-x)+f(x)+2=0$

$f(1)=-1$

$-a+b=-1$

$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{8}$

$ab=-\frac{7}{64}$

단답형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a, a+k)$, $\mathrm{B}(b, b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k \neq 0$, $b+2k \neq 0$) [4점]

$(a,\ a+k)$, $(b,\ b+k)$는 $y=x+k$ 위의 점이므로

$y=x+k$

$x^2-2x(x+k)+2(x+k)^2=15$

$x^2+2kx+2k^2-15=0$

이차방정식의 해가 a, b 이므로

$a+b=-2k$, $ab=2k^2-15$

$2x-2y-2xy'+4yy'=0$

$y'=\dfrac{2y-2x}{4y-2x}=\dfrac{y-x}{2y-x}$

$\dfrac{k}{a+2k}\times\dfrac{k}{b+2k}=-1$

$-k^2=ab+2k(a+b)+4k^2$

$2k^2-15+2k(-2k)+5k^2=0$

$3k^2-15=0$

$k^2=5$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n \le -1)\\ a_n & (a_n > -1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
(나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=5$ 이고

$b_3=-1$, $a_3 \le -1$ 이므로 $-1<r<0$임을 알 수 있고

$b_{2k}=a_{2k}$ $(\because a_{2k}>0)$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\dfrac{a_1 r}{1-r^2}=8$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-1-1+\dfrac{a_1 r^4}{1-r^2}=-3$

$\dfrac{a_1 r^4}{1-r^2}=-1$

$r=-\dfrac{1}{2}$, $a_1=-12$

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}}=24$

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 포물선 $y^2 = -12(x-1)$의 준선을 $x=k$라 할 때, 상수 k의 값은? [2점]

① 4 ② 7 ③ 10 ④ 13 ⑤ 16

24. 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여

$$2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{BC}} = q\overrightarrow{\mathrm{CA}}$$

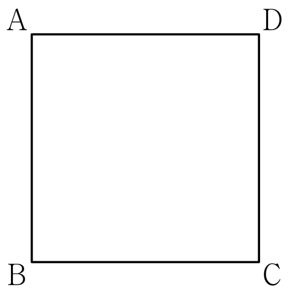
일 때, $p-q$의 값은? (단, p와 q는 실수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

25. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서

$$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BC}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3k\overrightarrow{\mathrm{CD}})=0$$

일 때, 실수 k의 값은? [3점]



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

26. 두 초점이 $\mathrm{F}(12,0)$, $\mathrm{F}'(-4,0)$이고, 장축의 길이가 24인 타원 C가 있다. $\overline{\mathrm{F'F}}=\overline{\mathrm{F'P}}$인 타원 C 위의 점 P에 대하여 선분 F′P의 중점을 Q라 하자. 한 초점이 F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이 점 Q를 지날 때, $\overline{\mathrm{PF}}+a^2+b^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 46 ② 52 ③ 58 ④ 64 ⑤ 70

27. 포물선 $(y-2)^2=8(x+2)$ 위의 점 P와 점 A$(0, 2)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 P를 P_0이라 하자. $\overline{\mathrm{OQ}}+\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{OP}_0}+\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{A}}$를 만족시키는 점 Q에 대하여 점 Q의 y좌표의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, M^2+m^2의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

28. 좌표평면의 네 점 A$(2, 6)$, B$(6, 2)$, C$(4, 4)$, D$(8, 6)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 점 X의 집합을 S라 하자.

> (가) $\{(\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\}\times\{|\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|-3\}=0$
>
> (나) 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OX}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$가 서로 평행하도록 하는 선분 AB 위의 점 P가 존재한다.

집합 S에 속하는 점 중에서 y좌표가 최대인 점을 Q, y좌표가 최소인 점을 R이라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

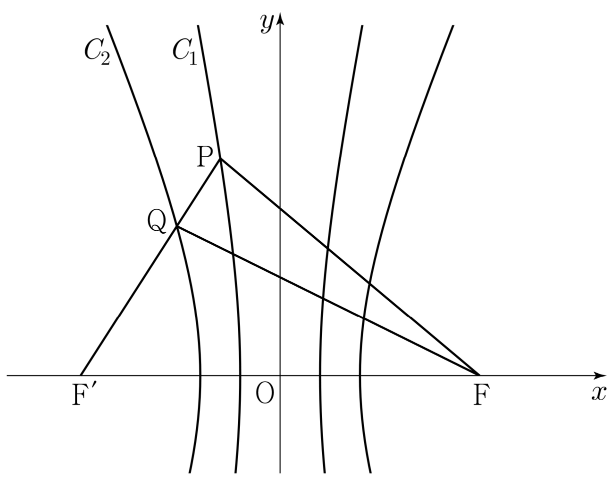
① 25 ② 26 ③ 27 ④ 28 ⑤ 29

단답형

29. 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>0)$을 초점으로 하는 두 쌍곡선

$$C_1 : x^2-\frac{y^2}{24}=1,\quad C_2 : \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{21}=1$$

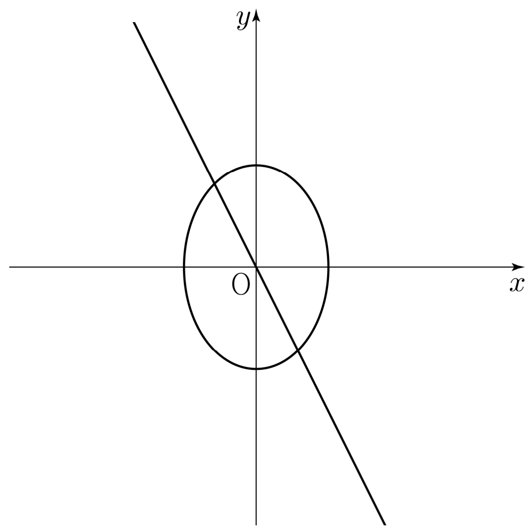
이 있다. 쌍곡선 C_1 위에 있는 제2사분면 위의 점 P에 대하여 선분 PF′이 쌍곡선 C_2와 만나는 점을 Q라 하자.
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QF}}$, $2\overline{\mathrm{PF'}}$, $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 직선 PQ의 기울기는 m이다. $60m$의 값을 구하시오. [4점]



30. 직선 $2x+y=0$ 위를 움직이는 점 P와 타원 $2x^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 Q에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

를 만족시키고, x좌표와 y좌표가 모두 0 이상인 모든 점 X가 나타내는 영역의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



∗ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.