제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$2^2 \times 2^{-2} = 1$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$

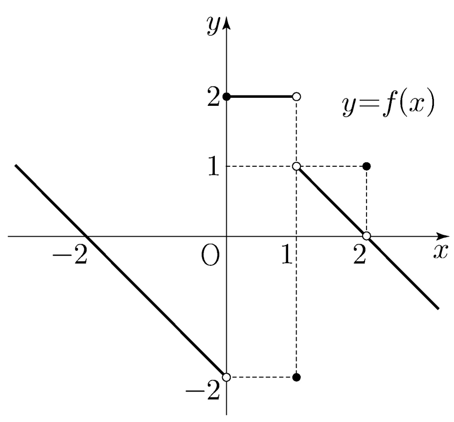
$f'(2) = 12$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $-\frac{2}{9}$　④ $-\frac{1}{9}$　⑤ 0

$1 - \frac{4}{9} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

$\lim_{x \to 0-} f(x) = -2$, $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$r + r^2 = 6,\ r = 2$

$a_6 + a_7 = r^4(a_2 + a_3) = 24$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

$-1 + a = 1,\ a = 2$

$3b - 2 = 3,\ b = \frac{5}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$

$a = \frac{3\pi}{4},\ \left(\frac{3\pi}{4}, 1\right)$

$b = \frac{\pi}{4},\ \left(\frac{\pi}{4}, -1\right)$

$\frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

(가) $f(1)=3$
(나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$\frac{a-3}{5-1}=5,\ a=23$

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

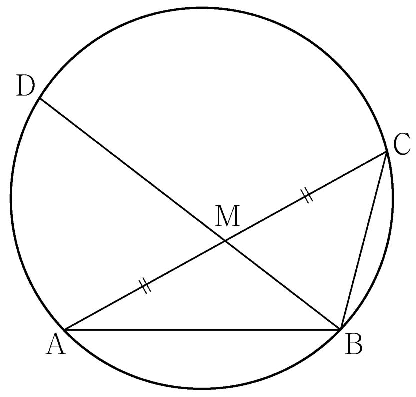
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$x^3-x^2-x+6\geq a$

$3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$5\geq a$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

$\overline{AC}=x$

$4=x^2+9-6x\times\frac{7}{8},\ x=4$

$\overline{AM}=\overline{MC}=2$

$\overline{BM}=\sqrt{4+9-12\times\frac{7}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{BM}\times\overline{MD}$

$\therefore\ \overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t,\quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$t=4$일 때, 점 P가 원점으로 돌아온다.

$\frac{1}{2}\times 4\times 12=24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $a_5\times a_7<0$

(나) $\sum_{k=1}^{6}|a_{k+6}|=6+\sum_{k=1}^{6}|a_{2k}|$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

$a_5<0,\ a_7>0$

$a_7+a_8+\cdot\cdot\cdot+a_{12}=6-a_2-a_4+|a_6|+a_8+a_{10}+a_{12}$

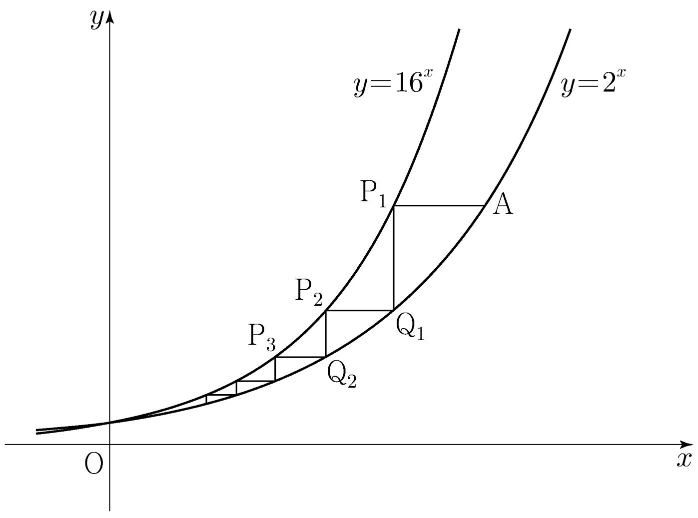
$a_7+a_9+a_{11}+a_2+a_4=6+|a_6|$

$5a_6+3=|a_6|,\ a_6=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ a_{10}=\frac{23}{2}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



$A(64, 2^{64})$, $P_1(16, 2^{64})$, $Q_1(16, 2^{16})$, $P_2(4, 2^{16})$
$Q_2(4, 2^4)$, $P_3(1, 2^4)$, $Q_3(1, 2)$, $P_4\left(\frac{1}{4}, 2\right)$

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$x_5 = \frac{1}{16},\ x_6 = \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{k} \le \frac{1}{16},\ 16 \le k < 64$$

48

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \int_0^x f(t)\,dt & (x \ge 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

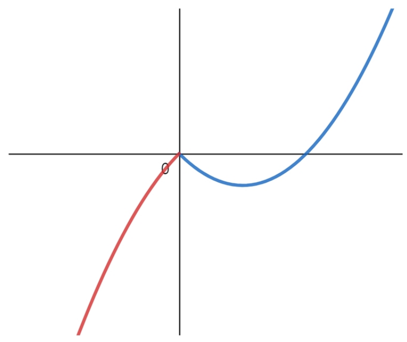
ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2 < f(1) < 4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

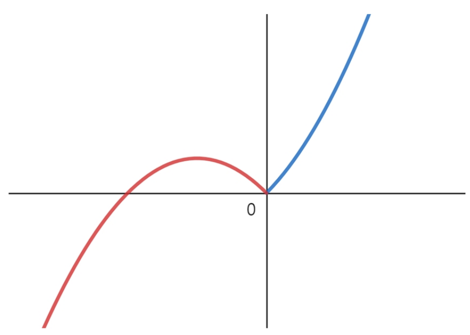
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

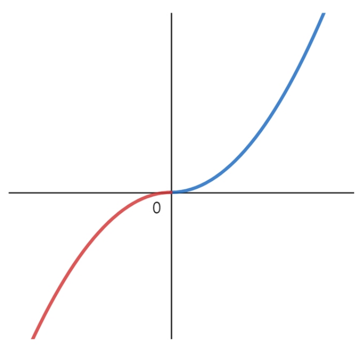
ㄱ. $g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x \ge 0) \end{cases}$ 이고 $g(x)$는 삼차함수 이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $\lim_{x \to 0-}(-f(x)) = \lim_{x \to 0+} f(x)$이다.

$\therefore f(0)=0$

ㄴ. 반례 $f(x) = \begin{cases} -g'(x) & (x<0) \\ g'(x) & (x \ge 0) \end{cases}$ 이므로 $g'(x)=3x^2$ 이면 $f(x)$는 극댓값을 갖지 않는다.







ㄷ. ㄱ.으로부터

$g'(x) = \begin{cases} 3x(x+a) \\ 3x^2 \\ 3x(x-a) \end{cases} \quad (a>0)$

$g'(x) = 3x(x+a)$일 때,

$f(x) = \begin{cases} -3x(x+a) & (x<0) \\ 3x(x+a) & (x \ge 0) \end{cases}$ 이고

$2 < f(1) < 4,\ 0 < a < \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 0+} f'(x) = 3a < 1$ 이므로 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3

$g'(x) = 3x(x-a)$일 때,

$f(x) = \begin{cases} -3x(x-a) & (x<0) \\ 3x(x-a) & (x \ge 0) \end{cases}$ 이고

$2 < f(1) < 4,\ 0 < a < \frac{1}{3}$

$\lim_{x \to 0-} f'(x) = 3a < 1$ 이므로 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3

$g'(x) = 3x^2$일 때, $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \dfrac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \dfrac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$$a_2 = \frac{1}{k+1} > 0$$
$$a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} < 0$$
$$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \begin{cases} 0 & (k=1) \\ \dfrac{2}{k+1} - \dfrac{1}{k} > 0 & (k \ne 1) \end{cases}$$
$k=1$이면 $a_{22}=0$

$$a_5 = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k} < 0$$
$$a_6 = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \begin{cases} 0 & (k=2) \\ \dfrac{3}{k+1} - \dfrac{2}{k} > 0 & (k \ne 1,\ k \ne 2) \end{cases}$$
$k=2$ 이면 $a_{22} \ne 0$

$$a_7 = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k} < 0$$
$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \begin{cases} 0 & (k=3) \\ \dfrac{4}{k+1} - \dfrac{3}{k} & (k \ne 1, 2, 3) \end{cases}$$
$k=3$ 이면 $a_{22}=0$

• • •

$\therefore$ $k = 1, 3, 10$ 일 때, $a_{22} = 0$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$x > 2$

$x^2 - 4 = 32$, $x = 6$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 1$

$f(-2) = 15$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$220+10a=250,\ a=3$

19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$f(x)=(x-1)^2(x+1)^2+3$
$\quad=x^4-2x^2+4$

$a+b=2$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_{x}^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$g'(1)=g'(4)=0$

$f(1)=-f(2),\ f(4)=-f(5)$

$f(x)=2(x-1)(x-5)+3$

$f(0)=13$

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$g'(1)=g'(4)=0$

$f(1)=-f(2),\ f(4)=-f(5)$

$f(x)=2x^2+ax+b$

$f(1)+f(2)=3a+2b+10=0$
$f(4)+f(5)=9a+2b+82=0$

$b=13$

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=k$(단, k는 정수)

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)=8^{\frac{k}{2}}$에서

$\frac{3}{4n+16}$이 유리수 이므로

$k=2a$(a는 정수) 이고

$\frac{3}{4n+16}<1$ 이므로 a는 음의 정수

$4(n+4)=3\times 8^{-a}$

$n=3\times 2-4,\ 3\times 2^4-4,\ 3\times 2^7-4$

426

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\ (x+a)f(x-b) & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

> $\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

실수 전체의 집합에서 연속이므로 $3f(0)=af(-b)$

$$\lim_{x\to-3}\frac{|g(x)|}{(x+3)^2}\times\frac{1}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2}\times\frac{1}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$

-3, 6에서만 극한값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $(x+3)$을 인수로 갖고 $g(-3)=g(6)=0$

$f(x)=(x+3)(x-k)$라 하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{|(x+3)^2(x-k)|}{(x+3)^2}\times\frac{1}{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}+|g(t)|}$$ 이므로
$$=\frac{|-3-k|}{2|g(t)|}$$

$2|(t+3)^2(t-k)|\,(t<0)$, $2|(t+a)(t+3-b)(t-k-b)|\,(t\geq 0)$은 -3과 6이외의 다른 수를 넣었을 때, 0이 되면 안된다.

$\therefore k>0$, $t=b-3$, $t=b+k$를 대입하면 0이 되므로 극한값이 존재하지 않는 실수 t의 값이 -3과 6뿐일 수 없다. $\therefore b=9$, $k=-3$, $a=\frac{3}{4}$

$$g(4)=\left(4+\frac{3}{4}\right)\times 4=19$$

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

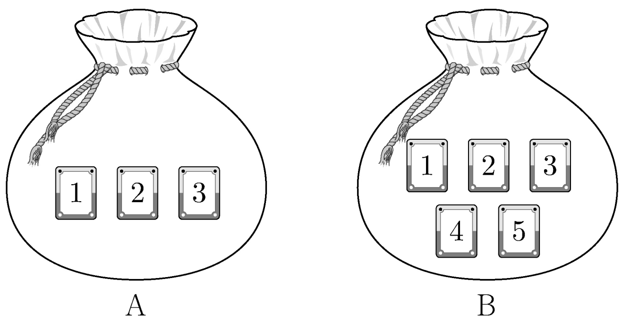
23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$\frac{5!}{3!} = 20$

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



$\frac{1+2+2}{3\times5} = \frac{1}{3}$

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

6의 약수 나올 확률 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4+{}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)+{}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$=\frac{16+32+24}{81}=\frac{8}{9}$$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$${}_4C_1\times{}_nC_1=12,\ n=3$$

$${}_4C_3\times{}_3C_0+{}_4C_0\times{}_3C_2=7$$

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384 ② 408 ③ 432 ④ 456 ⑤ 480

$$2^2 \times 4 \times 3^3 = 432$$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

$$\frac{{}_4P_3 + {}_3P_2 + 2 \times {}_4P_3 - 6}{{}_5P_4}$$
$$= \frac{3}{5}$$

단답형

29. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $f(f(1))=4$
>
> (나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

$f(1)=2,\ f(2)=4$

${}_2H_4=10$

$10\times5=50$

$f(1)=3,\ f(3)=4$

${}_1H_2=3$

$2\times5\times5=50$

$f(1)=4,\ f(4)=4$

${}_2H_2=3$

$3\times5=15$

$50+50+15=115$

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b-a\ge5$일 때, $c-a\ge10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(1, 6, 7 ~ 12), (1, 6, 11 ~ 12) : 6 / 2
(1, 7, 8 ~ 12), (1, 7, 11 ~ 12) : 5 / 2
(1, 8, 9 ~ 12), (1, 8, 11 ~ 12) : 4 / 2
(1, 9, 10 ~ 12), (1, 9, 11 ~ 12) : 3 / 2
(1, 10, 11 ~ 12), (1, 10, 11 ~ 12) : 2 / 2
(1, 11, 12), (1, 11, 12) : 1 / 1
(2, 7, 8 ~ 12), (2, 7, 12) : 5 / 1
(2, 8, 9 ~ 12), (2, 8, 12) : 4 / 1
(2, 9, 10 ~ 12), (2, 9, 12) : 3 / 1
(2, 10, 11 ~ 12), (2, 10, 12) : 2 / 1
(2, 11, 12), (2, 11, 12) : 1 / 1
• • •

$$\frac{16}{21+15+10+6+3+1}=\frac{16}{56}=\frac{2}{7}$$

9

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}=1$$

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$$2x-y'\ln x-\frac{y}{x}+1=0$$

$$y'=e+1$$

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점]

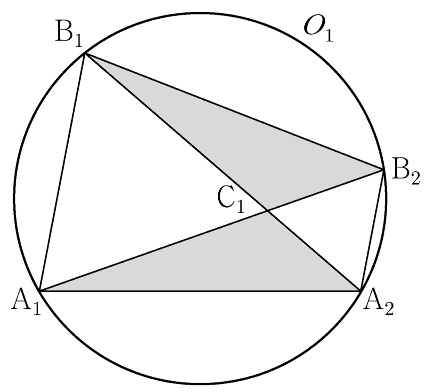
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$f(0)=3$

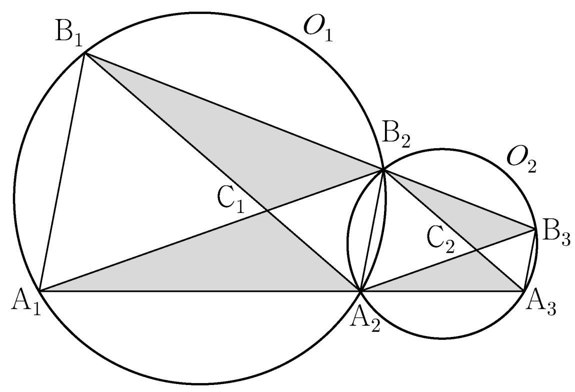
$g'(3)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1



R_2



⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

$\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}=\angle A_2B_2A_1$이고 선분 A_1B_1과 선분 A_2B_2가 평행하므로

$\angle B_1A_2B_2=\frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$와 삼각형 $C_1A_1B_1$은 정삼각형이다.

길이비는 2 : 1 넓이비는 4 : 1 첫 번째 항은 $2\times\frac{1}{2}\times2\times1\times\sin\frac{2\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$ 이므로 $a_n=3n+1$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고,
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

$f(1)=0$

$g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$ 이므로 $f'(2)=0,\ f(2)\le 1$

$|f(x)|=1$을 만족시키는 서로 다른 실수 x의 개수는 3개 이므로 $f(2)=1$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-2-3k)+1$ 라 하면

$f(1)=\frac{1}{2}(-1-3k)+1=0,\ k=\frac{1}{3}$

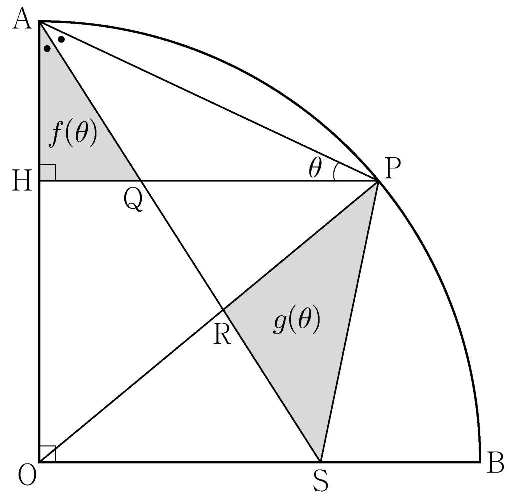
$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$

$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{25}{27}$

$g(x)$의 극솟값은 $\ln\frac{25}{27}$

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^3 \times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



$\angle QAH=\angle PAQ=\alpha$ 라 하면 $2\alpha+\theta=\frac{\pi}{2}$

$\angle AOP=\pi-4\alpha=2\theta$

$\overline{AH}=1-\cos 2\theta=2\sin^2\theta$

$\overline{HQ}=2\sin^2\theta \tan\alpha=2\sin^2\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times 4\sin^4\theta\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

$\angle ARP=\angle ORS=\frac{\pi}{4}+3\theta,\ \angle PRS=\frac{3\pi}{4}-3\theta$

$$\frac{2\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\theta\right)}=\frac{\overline{PR}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)},\ \overline{PR}=\frac{2\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\theta\right)}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\theta\right)}=\frac{\overline{RS}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)},\ \overline{RS}=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\times\cos 2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\theta\right)}$$

$k=\frac{1}{2}$

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

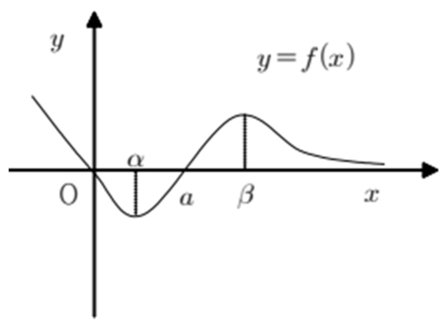
의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

$g(5)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-} g(t) \neq \lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

방정식 $\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=f'(t)$의 실근은 곡선 위의 한 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식과 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표이다.

$f(0)=f(a)=0$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

$f'(x)=\frac{-\{x^2-(a+2)x+a\}}{e^x}$



$g(t)+\lim_{t\to 5} g(t)=5$ 이므로 $g(t)$는 $t=5$에서 불연속 이므로 $(5,\ f(5))$는 변곡점이다.

$f''(x)=\frac{x^2-(a+4)x+2a+2}{e^x},\ a=\frac{7}{3}$

$\lim_{t\to k-} g(t)\neq\lim_{t\to k+} g(t)$를 만족시키는 k의 값은 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값이므로

모든 실수 k값의 합은 $a+2=\frac{13}{3}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$ ② $6\sqrt{5}$ ③ $8\sqrt{5}$ ④ $10\sqrt{5}$ ⑤ $12\sqrt{5}$

25. 좌표평면에서 두 직선

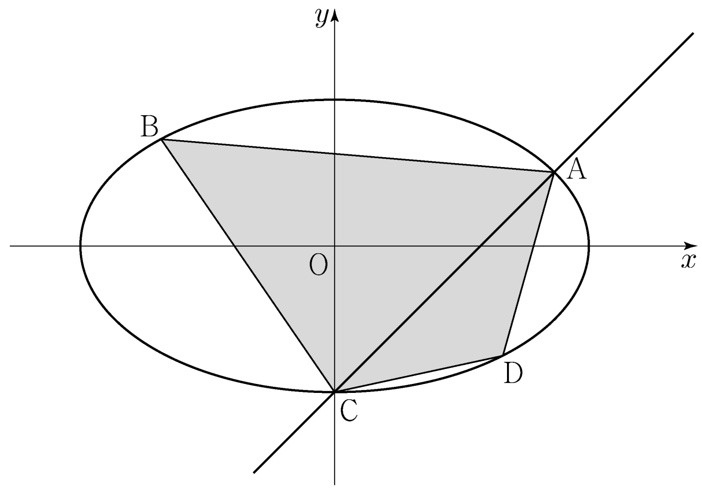
$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

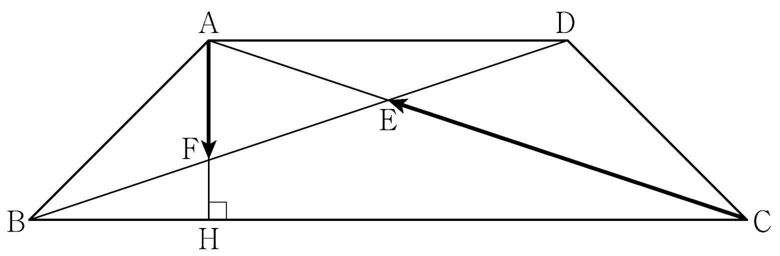
26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3



27. $\overline{\mathrm{AD}}=2$, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BCD}=45^\circ$인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CE}}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$

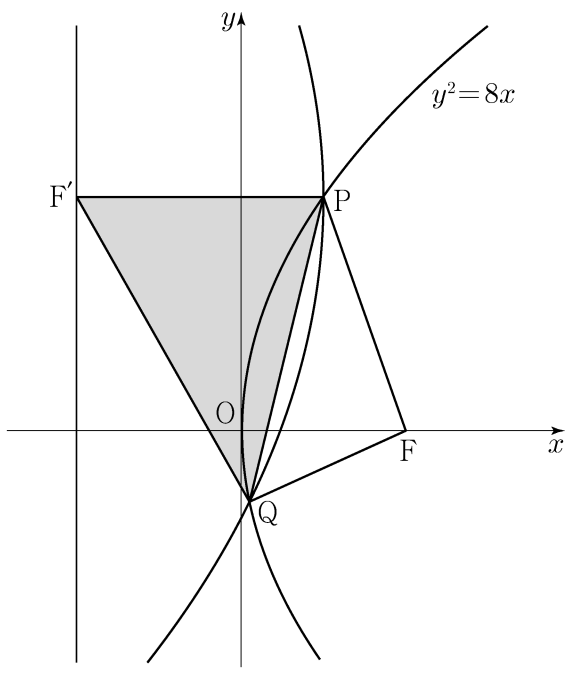


28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 $\mathrm{A}(c,\,0)$, $\mathrm{B}(-c,\,0)\,(c>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PA}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3,\,3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

단답형

29. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

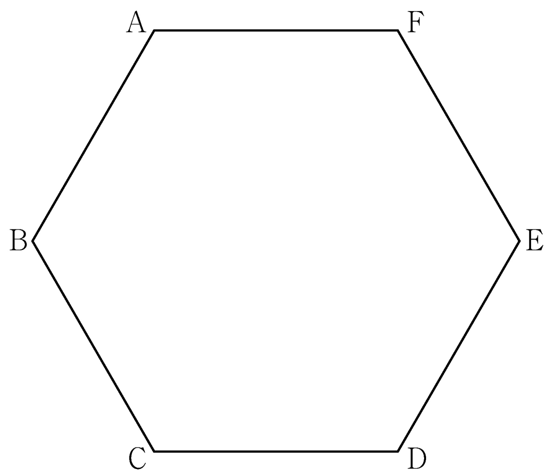


30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.