

preMlumcontents#03

조립제법과 접선, 극한



생각한 만큼만 수학이다

검토/ 이학송(뷰티풀마인드), 조인상(임기세수학), 차동희(수학전문공감)
송태원(송태원1프로수학), 정효석(정효석수학연구소), 오정화(오정화수학)

mathbunker.com

Copyright 2020. 수학병커 All rights reserved.

조립제법을 이용하여 다항식을 $x-a$ 의 거듭제곱에 대한 내림차순으로 정리하기

조립제법을 이용하여 x^3+x^2+x-3 을 인수분해하면

$$x^3+x^2+x-3=(x-1)(x^2+2x+3)$$

이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

다음과 같이 조립제법을 이용하면 $3x^3-x+2=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$ 와 같이 삼차다항식 $3x^3-x+2$ 를 일차식 $x-1$ 의 거듭제곱에 대한 내림차순으로 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d \\ & = (x-1)\{a(x-1)^2+b(x-1)+c\}+d \\ & 3x^3-x+2 \\ & = (x-1)(3x^2+3x+2)+4 \quad \leftarrow d=4 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ & & 3 & 3 & 2 \\ \hline & 3 & 3 & 2 & 4=d \end{array}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad & a(x-1)^2+b(x-1)+c \\ & = (x-1)\{a(x-1)+b\}+c \\ & 3x^2+3x+2 \\ & = (x-1)(3x+6)+8 \quad \leftarrow c=8 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 3 & 2 \\ & & 3 & 6 \\ \hline & 3 & 6 & 8=c \end{array}$$



$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad & a(x-1)+b \\ & = (x-1) \cdot a+b \\ & 3x+6=(x-1) \cdot 3+9 \quad \leftarrow b=9, a=3 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 3 & 6 \\ & & 3 \\ \hline a=3 & 3 & 9=b \end{array}$$



조립제법을 이용하면

$$3x^3-x+2=3(x-1)^3+9(x-1)^2+8(x-1)+4$$

이다. 이때 $f(x)=3x^3-x+2$ 라 하면

$$f(x)=3(x-1)^3+9(x-1)^2+8(x-1)+4 \quad \dots\dots \text{☺}$$

이다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ & & 3 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 3 & 2 & 4=d \\ & & 3 & 6 \\ \hline 1 & 3 & 6 & 8=c \\ & & 3 \\ \hline a=3 & 3 & 9=b \end{array}$$

이와 같이 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 의 거듭제곱에 대한 내림차순으로 정리하면 $f(a)$ 와 $f'(a)$ 의 값을 쉽게 구할 수 있으며 극한 계산에서도 유용하게 쓰인다. 즉, ☺에서 $f(1)=4$ 이고

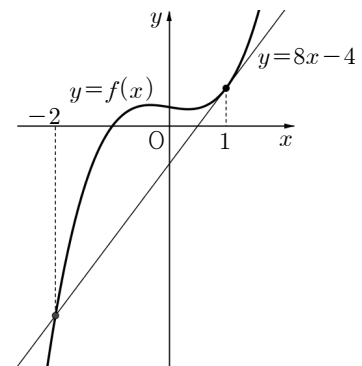
$$f'(x)=9(x-1)^2+18(x-1)+8 \text{이므로 } f'(1)=8 \text{이다.}$$

또한 $f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)+(mx+n)$ 꼴로 변형하면 함수 $f(x)$ 의 $x=\alpha$ 에서의 접선의 방정식이 $y=mx+n$ 이라는 것을 알 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3(x-1)^3+9(x-1)^2+8(x-1)+4 \\ &= 3(x-1)^2(x+2)+(8x-4) \end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 접선의 방정식은 $y=8x-4$ 이다.

이때 곡선 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 직선 $y=8x-4$ 를 통과하지 못하고 접하고(bounce) $x=-2$ 에서 직선 $y=8x-4$ 를 단순히 통과한다.(cross)



조립제법을 이용하여 접선의 방정식 구하는 방법

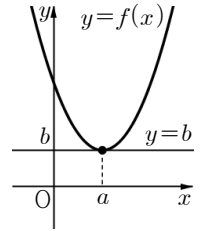
삼차함수 $f(x)$ 를 조립제법을 이용하여 일차식 $x-k$ 의 거듭제곱에 대한 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-k)^3 + b(x-k)^2 + c(x-k) + d \\ &= (x-k)^2 \{a(x-k) + b\} + (cx + d - ck) \\ &= (x-k)^2 (ax + b - ak) + (cx + d - ck) \end{aligned}$$

일 때 삼차함수 $f(x)$ 의 $x=k$ 에서의 접선의 방정식은 $y=cx+d-ck$ 이다.

왜냐하면 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프가 $x=k$ 에서 직선 $y=cx+d-ck$ 를 통과하지 못하고 접하므로(bounce) $x=k$ 에서의 접선의 방정식이 된다.

이것은 이차함수 $f(x)=(x-a)^2+b$ 의 $x=a$ 에서의 접선의 방정식이 $y=b$ 인 것과 같은 이치이다. 즉, 이차함수 $f(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 에서 직선 $y=b$ 를 통과하지 못하고 접하기(bounce) 때문이다.



Example

곡선 $y=x^3-2x^2+3x-5$ 의 $x=1$ 에서의 접선의 방정식은 무엇인가?

Solution

x^3-2x^2+3x-5 를 조립제법을 이용하여

$$a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$$

꼴로 변형하면 $x=1$ 에서의 접선의 방정식을 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} x^3-2x^2+3x-5 &= 1 \cdot (x-1)^3 + 1 \cdot (x-1)^2 + 2 \cdot (x-1) + (-3) \\ &= (x-1)^3 + (x-1)^2 + 2(x-1) - 3 \\ &= (x-1)^2 \{(x-1) + 1\} + (2x-5) \\ &= (x-1)^2 x + (2x-5) \end{aligned}$$

1	1	-2	3	-5
		1	-1	2
1	1	-1	2	-3
		1	0	
1	1	0	2	
		1		
	1	1		

곡선 $y=x^3-2x^2+3x-5$ 는 $x=1$ 에서 직선 $y=2x-5$ 를 통과하지 못하고 접하고(bounce) $x=0$ 에서 직선 $y=2x-5$ 를 단순히 통과한다.(cross)

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y=2x-5$ 이다.

Example

곡선 $y = x^3 - 2x + 3$ 위의 점 $(1, 2)$ 에서의 접선과 이 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 얼마인가?

Solution

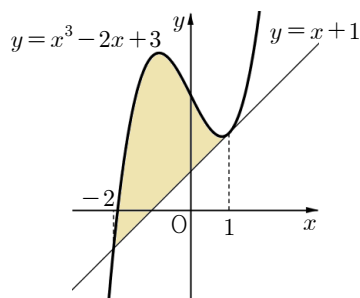
다항식 $x^3 - 2x + 3$ 을 $(x-1)^2$, 즉 $x^2 - 2x + 1$ 로 나누면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 1 & 2 & \\ 1 & -2 & 1 &) & 1 & 0 & -2 & 3 \\ & 1 & -2 & 1 & & & & \\ \hline & & 2 & -3 & 3 & & & \\ & & 2 & -4 & 2 & & & \\ \hline & & & 1 & 1 & & & \end{array}$$

$$\therefore x^3 - 2x + 3 = (x-1)^2(x+2) + (x+1)$$

이것은 곡선 $y = x^3 - 2x + 3$ 이 $x=1$ 에서 직선 $y = x+1$ 을 통과하지 못하고 접하고(bounce) $x=-2$ 에서 직선 $y = x+1$ 을 단순히 통과한다.(cross) 이때 직선 $y = x+1$ 이 접선이 된다.

따라서 구하는 넓이는 $\frac{|1|}{12} \{1 - (-2)\}^4 = \frac{27}{4}$ 이다.



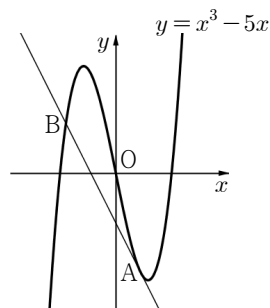
Example

곡선 $y = x^3 - 5x$ 위의 점 $A(1, -4)$ 에서의 접선이 점 A 가 아닌 점 B 에서 곡선과 만난다. 선분 AB 의 길이는 얼마인가? [2013학년도 6월 모의평가]

Solution A

$x^3 - 5x$ 를 조립제법을 이용하여 $a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$ 꼴로 변형하면 $x=1$ 에서의 접선의 방정식을 쉽게 구할 수 있다.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ & & 1 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ & & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 & -2 & \\ & & 1 & & \\ & 1 & 3 & & \end{array}$$



$$\begin{aligned} x^3 - 5x &= 1 \cdot (x-1)^3 + 3 \cdot (x-1)^2 + (-2) \cdot (x-1) + (-4) \\ &= (x-1)^2 \{(x-1) + 3\} + (-2x - 2) \\ &= (x-1)^2(x+2) + (-2x - 2) \end{aligned}$$

이것은 곡선 $y = x^3 - 5x$ 가 $x=1$ 에서 직선 $y = -2x - 2$ 를 통과하지 못하고 접하고(bounce) $x=-2$ 에서 직선 $y = -2x - 2$ 를 단순히 통과한다는(cross) 것을 의미한다.

$$\therefore B(-2, 2), \overline{AB} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

Solution B

삼차함수와 삼차방정식에서 이차항이 존재하지 않으면 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 먼저 떠올려야 한다.

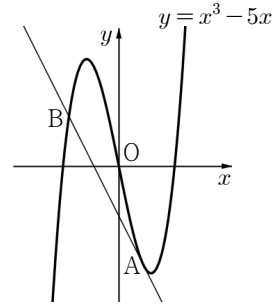
곡선 $y = x^3 - 5x$ 는 점 A(1, -4)에서 접선을 통과하지 못하고 접하고 (bounce) 점 B에서 접선을 단순히 통과한다.(cross)

이때 점 B의 x 좌표를 a , 접선의 방정식을 $y = g(x)$ 라 하면

삼차방정식 $x^3 - 5x = g(x)$, 즉 $x^3 - 5x - g(x) = 0$ 은 이중근인 한 실근 1과 다른 한 실근 a 를 갖는다.

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$1 + 1 + a = -\frac{0}{1} = 0 \quad \therefore a = -2, B(-2, 2)$$



Solution C

삼차함수 $y = x^3 - 5x$ 의 변곡점은 (0, 0)이다.

삼차방정식 $x^3 - 5x = g(x)$, 즉 $x^3 - 5x - g(x) = 0$ 은 이중근인 한 실근 1과 다른 한 실근 a 를 갖는다.

이때 삼차방정식의 세 실근의 합은 변곡점의 x 좌표의 3배와 같으므로

$$1 + 1 + a = 0 \times 3 = 0 \quad \therefore a = -2, B(-2, 2)$$

Solution D

$f(x) = x^3 - 5x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 5$ 이므로 점 A(1, -4)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -2$ 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y - (-4) = -2(x - 1) \quad \therefore y = -2x - 2$

곡선 $y = f(x)$ 와 접선 $y = -2x - 2$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 5x = -2x - 2, \quad x^3 - 3x + 2 = 0$$

$g(x) = x^3 - 3x + 2$ 라 하면 $g(1) = 1 - 3 + 2 = 0$ 이므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$g(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$= (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x + 2)$$

$$= (x - 1)^2(x + 2)$$

$$= 0$$

$\therefore x = 1$ (이중근인 한 실근) 또는 $x = -2$

따라서 A(1, -4), B(-2, 2)이므로 $\overline{AB} = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (2 + 4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

1	1	0	-3	2
		1	1	-2
1	1	1	-2	0
		1	2	
-2	1	2	0	
		-2		
	1	0		

극한의 성질에 대한 이해

다음은 다항함수에 대한 극한의 성질이다.

다항함수 $f(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

- ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{ax^n + \dots} = L (L \neq 0)$ 이면 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 $a \times L$ 인 n 차 다항함수이다.
- ② $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = L$ (유한확정값)이면 $f(x) = (x-a)Q(x)$ 이다. (단, $Q(x)$ 는 다항식이다.)

- ① $x \rightarrow \infty$ 일 때의 극한값이 0이 아닌 유한확정값 L 을 가지므로 분모와 분자의 차수는 같고 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비는 L 이다.

이때 분모 $ax^n + \dots$ 의 차수가 n 이므로 분자 $f(x)$ 의 차수 역시 n 이고 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비가 L 이므로 $\frac{(\text{분자의 최고차항의 계수})}{(\text{분모의 최고차항의 계수})} = L$ 을 만족한다.

즉, (분자의 최고차항의 계수) = (분모의 최고차항의 계수) $\times L = a \times L$ 이다.

따라서 $f(x) = (a \times L)x^n + \dots$ 꼴이다.

예컨대 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^3 + x^2 + 1} = 3$ 의 경우 0이 아닌 극한값 3이 존재하므로 분모와 분자의 차수는 같고

분모와 분자의 최고차항의 계수의 비는 3이다.

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2×3 , 즉 6인 삼차함수이다.

즉, $f(x) = 6x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수) 꼴이다.

또한 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{3x^2} = 2$ 의 경우 0이 아닌 극한값 2가 존재하므로 분모와 분자의 차수는 같고 분모와 분자의 최고차항의 계수의 비는 2이다.

따라서 $f(x) - x^3$ 은 최고차항의 계수가 3×2 , 즉 6인 이차함수이다.

즉, $f(x) - x^3 = 6x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수) 꼴이므로 $f(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ 이다.

- ② 만약 $f(x) = (x-a)Q(x)$ 꼴이 아니면 $x \rightarrow a$ 일 때 $\frac{f(x)}{x-a} \rightarrow \pm \infty$ 가 되어 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = L$ 이라는 조건

에 모순이 된다. 이때 $f(x) = (x-a)^2 Q_1(x)$, $f(x) = (x-a)^3 Q_2(x)$, ...도 가능하다. 즉, $f(x)$ 는 적어도 1차 이상의 인수 $x-a$ 를 가져야 한다.

따라서 이것을 엄밀하게 표현하면 $f(x) = (x-a)^n Q(x)$ (n 은 자연수, $Q(x)$ 는 $Q(a) \neq 0$ 인 다항식)이다.

예컨대 삼차함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = -1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 를 만족하면 $f(x)$ 는 두 일차식 $x-1$, $x-2$ 를 인수로 가지므로 $f(x) = a(x-1)(x-2)(x+b)$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수) 꼴이다.

다음은 극한과 관련된 인수정리이다.

다항식 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이면 $f(a) = 0$ 이다.

$\Leftrightarrow f(x)$ 는 일차식 $x - a$ 로 나누어떨어진다.

$\Leftrightarrow f(x)$ 는 일차식 $x - a$ 를 인수로 갖는다.

$\Leftrightarrow f(x) = (x - a)Q(x)$ 꼴이다. (단, $Q(x)$ 는 다항식이다.) ☺

☺를 엄밀히 표현하면 다음과 같다.

‘ $\Leftrightarrow f(x) = (x - a)^n Q(x)$ (n 은 자연수, $Q(x)$ 는 $Q(a) \neq 0$ 인 다항식)’

예컨대 이차식 $f(x)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) = a(x - 1)(x + b) \quad (a \neq 0, a, b \text{는 상수})$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x - 1)Q(x) \quad (\text{단, } Q(x) \text{는 다항식이다.})$$

조립제법과 극한의 만남

n 차 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=p$, $f'(a)=q$ 이면 다음이 성립한다.

$$f(x)-p=k_n(x-a)^n+k_{n-1}(x-a)^{n-1}+k_{n-2}(x-a)^{n-2}+\cdots+q(x-a)$$

따라서 $f(a)=0$, $f'(a)=q$ 이면 다음이 성립한다.

$$f(x)=k_n(x-a)^n+k_{n-1}(x-a)^{n-1}+k_{n-2}(x-a)^{n-2}+\cdots+q(x-a)$$

극한 문제에서 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{x-a} = b$ 가 문제의 조건으로 주어지면 $f(a)=0$, $f'(a)=b$ 이다.

이때 $f(x)$ 의 함수식은 다음과 같다.

❶ $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 $k(k \neq 0)$ 인 이차함수이면 $f(x)=k(x-a)^2+b(x-a)$ 이다.

❷ $f(x)$ 가 최고차항의 계수가 $k(k \neq 0)$ 인 삼차함수이면 $f(x)=k(x-a)^3+l(x-a)^2+b(x-a)$ 이다.

Example

두 상수 a , b 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

㉠ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = 4$ 가 성립할 때, $a-b$ 의 값은 얼마인가?

㉡ 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3$ 이 성립할 때, $f(2)$ 의 값은 얼마인가?

Solution A

㉠ $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 4가 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax+b) = 0$ 이어야 한다.

$$1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-a-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = a+2=4$$

$$\therefore a=2, b=-3, a-b=5$$

1	1	a	-a-1
		1	a+1
	1	a+1	0

Solution B

㉠ $f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 $f(1)=0$, $f'(1)=4$ 이므로 $f(x)=(x-1)^2+4(x-1)$ 꼴이다.

$$\therefore f(x)=x^2+2x-3 \quad \therefore a=2, b=-3$$

참고 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 4가 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, 즉 $f(1)=0$ 이어야 한다.

$$\text{또한 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=4 \text{이다.}$$

㉡ $f(1)=0$, $f'(1)=3$ 이므로 $f(x)=(x-1)^3+p(x-1)^2+3(x-1)$ 꼴이다.

$$\text{이때 } f(0)=0 \text{이므로 } (-1)+p-3=0 \quad \therefore p=4, f(x)=(x-1)^3+4(x-1)^2+3(x-1)$$

$$\therefore f(2)=8$$

참고 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 3이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$, 즉 $f(1)=0$ 이어야 한다.

또한 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)=3$ 이다.

Solution ⑥

① $f(x)=x^2+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=2x+a$ 이다.

$$f(1)=0, f'(1)=4 \text{에서 } 1+a+b=0, 2+a=4 \quad \therefore a=2, b=-3$$

② $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이다.

$$f(1)=0, f'(1)=3 \text{에서 } 1+a+b=0, 3+2a+b=3 \quad \therefore a=1, b=-2$$

$$f(x)=x^3+x^2-2x \quad \therefore f(2)=8$$

Solution ⑦

① $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 4가 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$f(x)=x^2+ax+b \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} \text{이다.}$$

$$\text{로피탈의 정리에 의해 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1} = f'(1)=4 \text{이다.}$$

② $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 3이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\text{로피탈의 정리에 의해 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{1} = f'(1)=3 \text{이다.}$$

참고 로피탈의 정리

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이 두 극한은 모두 $\frac{0}{0}$ 꼴의 부정형이다. 이처럼 함수의 극한값을 계산할 때 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 0^0,$

$\infty^0, 1^\infty$ 과 같은 부정형의 극한이 나타난다. 특히 빈번하게 나오는 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형의 극한은 주어진

함수식을 변형하여, 즉 분모와 분자를 분모와 분자의 공통인수로 나누거나 분모의 최고차항으로 나누는 방법으로 구하는데 번거로운 일이다. 그런데 다음과 같은 로피탈의 정리(L'Hopital's theorem)를 이용하면 좀 더 쉽게 극한값을 구할 수 있다.

두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하고

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \text{ 또는 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty \text{ 일 때}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{가 존재하면 } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{가 성립한다. (단, } g'(x) \neq 0 \text{)}$$

이 로피탈의 정리는 ‘함수의 몫의 극한은 그 함수의 도함수의 몫의 극한과 같다.’는 것을 말한다.
또한 이 로피탈의 정리는 $x \rightarrow a$ 가 다음 어느 것으로 바뀌어도 똑같이 성립한다.

$$x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow \infty, x \rightarrow -\infty$$

Example

함수 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $a + b + c + d$ 의 값은 얼마인가? (단, a, b, c, d 는 상수이다.)

Ⓐ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 2x + 3} = 3$

Ⓑ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = 4$

Solution

Ⓐ에서 $a = 0, b = 3$ ← $f(x)$ 는 이차식이다.

Ⓑ에서 $f(2) = 3, f'(2) = 4$ 이므로 $f(x) - 3 = 3(x - 2)^2 + 4(x - 2) \dots\dots \odot$ 이다.

$$\therefore f(x) = 3(x - 2)^2 + 4(x - 2) + 3 = 3x^2 - 8x + 7$$

$$\therefore a + b + c + d = f(1) = 2$$

참고 $\odot$ 를 다른 방법으로 설명하면 다음과 같다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2}$ 의 극한값이 존재하려면 분자 $f(x) - 3$ 이 $x - 2$ 를 인수를 가져야 한다.

왜냐하면 $x \rightarrow 2$ 일 때 분모가 0이 되는 $x - 2$ 가 약분되어 사라져야 하기 때문이다.

만약 약분되지 않으면 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2}$ 의 극한값은 존재하지 않고 발산한다.

이때 $f(x)$ 의 이차항의 계수가 3이므로 $f(x) - 3$ 의 이차항의 계수도 3이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)^2 + p(x - 2)}{x - 2} \text{ 꼴이 되어야 한다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x - 2)^2 + p(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)\{3(x - 2) + p\}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \{3(x - 2) + p\}$$

이 값이 4가 되려면 $p = 4$ 이어야 한다.

Example

다음 등식을 만족하는 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 값은 얼마인가?

Ⓐ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = 3$

Ⓑ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2 + 3x + 4} = 1, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2 - x - 2} = 2$

Ⓒ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3x^3}{x^2} = 2, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

Solution

Ⓐ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 3$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1×3 , 즉 3인 이차함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 3$ 에서 $f(2)=0$, $f'(2)=3$ 이므로 $f(x)=3(x-2)^2+3(x-2)$ 이다.

$$\therefore f(1)=0$$

㉞ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{2x^2+3x+4} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2×1 , 즉 2인 이차함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \cdot \frac{1}{x+1} = 2$ 에서 $f(2)=0$, $f'(2)=6$ 이다.

$$\therefore f(x)=2(x-2)^2+6(x-2), f(1)=-4$$

㉟ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-3x^3}{x^2} = 2$ 에서 $f(x)-3x^3$ 은 최고차항의 계수가 1×2 , 즉 2인 이차함수이다.

따라서 $f(x)$ 의 삼차항의 계수는 3, 이차항의 계수는 2이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$ 이므로 $f(x)=3(x-0)^3+2(x-0)^2+1 \cdot (x-0)$ 이다.

$$\therefore f(1)=6$$

Example

삼차함수 $f(x)$ 가 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 를 만족할 때, 방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근의 합은 얼마인가?

Solution ㉠

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $f(1)=0$, $f'(1)=1$ 이므로

$$f(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+1 \cdot (x-1), f'(x)=3a(x-1)^2+2b(x-1)+1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 에서 $f(2)=0$, $f'(2)=2$ 이므로

$$f(2)=a+b+1=0, f'(2)=3a+2b+1=2 \quad \therefore a=3, b=-4$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= 3(x-1)^3-4(x-1)^2+(x-1) \\ &= (x-1)(x-2)(3x-4) \end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ 이므로

모든 실근의 합은 $1+2+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$ 이다.

Solution ㉢

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 극한값 1이 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)=0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(1)=0$$

이것은 인수정리에 의해 삼차함수 $f(x)$ 가 일차식 $x-1$ 을 인수로 갖는다는 것을 의미한다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 극한값 2가 존재하고 (분모) $\rightarrow 0$ 이므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이어야 한다.

$$\therefore f(2) = 0$$

이것은 인수정리에 의해 삼차함수 $f(x)$ 가 일차식 $x-2$ 를 인수로 갖는다는 것을 의미한다.

따라서 $f(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$ ($a \neq 0$, a, b 는 상수)로 놓을 수 있다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2)(ax+b) = -(a+b) = 1 \dots\dots \text{☺}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)(ax+b) = 2a+b = 2 \dots\dots \text{☺}$$

☺, ☺를 연립하여 풀면 $a=3, b=-4$

$$\therefore f(x) = (x-1)(x-2)(3x-4)$$

따라서 방정식 $f(x)=0$ 의 근은 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\frac{4}{3}$ 이므로

모든 실근의 합은 $1+2+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$ 이다.



생각한 만큼만 수학이다