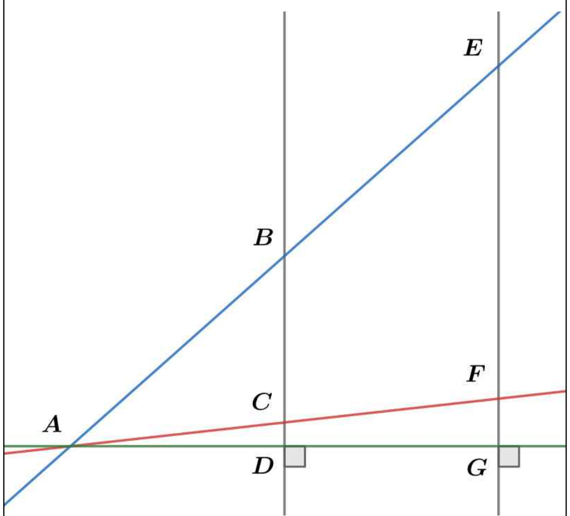
<수능에 필요한 기초 개념 총정리>

하트를 기억하자.

◈ $\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

◈ $\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$

닮음



$$\overline{AD} : \overline{AG} = \overline{BC} : \overline{EF} = \overline{CD} : \overline{FG} = \overline{BD} : \overline{EG}$$

곱셈 공식의 변형

◈ 곱셈 공식의 변형

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
- $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
- $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
- $a^2+b^2+c^2$
  $=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
- $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
- $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$
  $=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$

부정방정식

◈ 부정방정식

- 미지수의 개수보다 방정식의 개수가 적거나 미지수의 개수와 방정식의 개수가 같더라도 실제로는 같은 방정식이어서 방정식의 해가 무수히 많은 경우 이를 부정방정식이라 한다.

◈ 부정방정식의 풀이

1) 정수(또는 자연수) 조건

- 정수 × 정수 = 정수

2) a, b가 유리수 조건

- $a+b\sqrt{3}=0$ 이면 $a=0$, $b=0$

3) a, b가 실수 조건

- $a^2+b^2=0$, $|a|+|b|=0$, $a+bi=0$ 이면 $a=0$, $b=0$

***** 자연수(정수)의 개수찾기

◈ p^x의 꼴

1. $(소수)^{\frac{b}{a}}$ 꼴로 만든다.

2. $\frac{b}{a}$가 자연수가 되는 순서쌍 (a, b)의 개수를 찾는다.

◈ $\frac{f(x)}{g(x)}$의 꼴

1. $\frac{f(x)}{g(x)}=h(x)+\frac{a}{g(x)}$ 꼴로 만든다.
   (단, a는 상수)

2. $\frac{a}{g(x)}$가 자연수가 되는 x의 값을 구한다.

***** 수의 분류

◈ 수의 분류

$$\text{복소수}\begin{cases}\text{실수}\begin{cases}\text{무리수}\\ \text{유리수}\begin{cases}\text{정수}\\ \text{정수아닌유리수}\end{cases}\end{cases}\\ \text{허수}\end{cases}$$

◈ 실수 : 제곱하여 0이상인 수

◈ 유리수 : $\frac{b}{a}$꼴로 표현할 수 있는 수
단, $a\neq 0$이고 a, b는 정수

자연수의 분류

◈ 자연수(양의 정수)의 분류

- 약수의 개수에 의한 분류
  1) 1
  2) 소수 : 약수의 개수가 2개
  3) 합성수 : 약수의 개수가 3개 이상
- 배수의 특징
  1) 2의 배수
     : 일의 자리의 수가 0, 2, 4, 6, 8
  2) 5의 배수
     : 일의 자리의 수가 0, 5
  3) 3의 배수
     : 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수
  4) 9의 배수
     : 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수
  5) 4의 배수
     : $abcde$ 에서 $10d+e$가 4의 배수
  6) 6의 배수
     : 2의 배수이면서 3의 배수

약수

소수 $a, b(a \neq b)$와 자연수 m, n에 대하여 $a^m b^n$의

◈ 약수의 개수

$(m+1)(n+1)$

◈ 약수의 합

$(a^0+a^1+\cdot\cdot\cdot+a^m)(b^0+b^1+b^2+\cdot\cdot\cdot+b^n)$

◈ 약수의 곱

$(a^m b^n)^{\frac{(m+1)(n+1)}{2}}$

** '약수의 개수가 홀수 개'인 수는 제곱수이다.

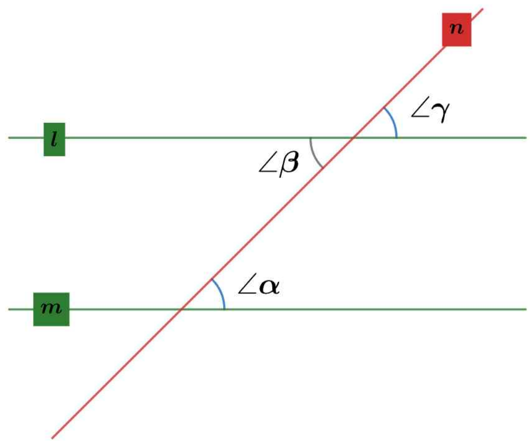
***** $a-b=1$인 경우의 유리화

◈ $$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

◈ $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

** 제곱해서 1차이가 나는 유리화는 역수이다. (자주 출제되므로 기억해두자.)

평행선의 성질



두 직선 l과 m은 평행하고

두 직선 l과 m은 직선 n과 한점에서 만날 때

$\angle\alpha=\angle\beta=\angle\gamma$

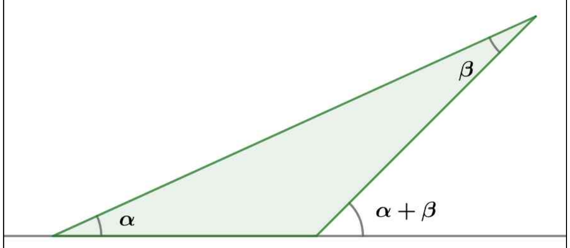
$\angle\alpha$와 $\angle\gamma$는 동위각

$\angle\alpha$와 $\angle\beta$는 엇각

$\angle\beta$와 $\angle\gamma$는 맞꼭지각

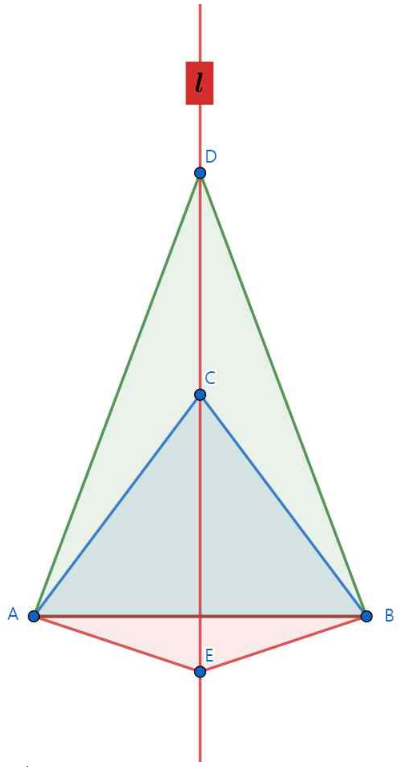
삼각형

세 내각의 합은 $180^\circ=\pi$



삼각형의 한 외각의 크기는 이와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

이등변삼각형



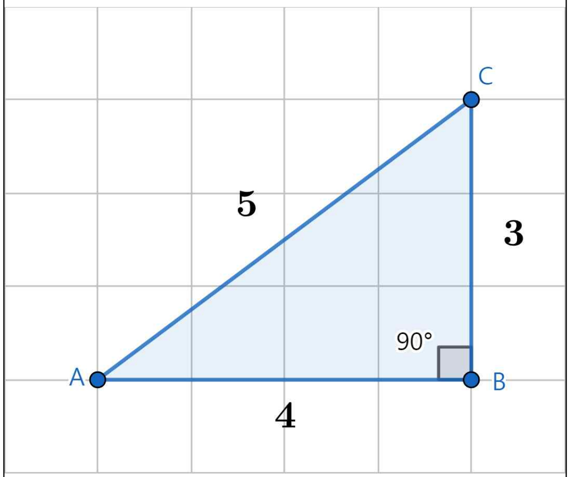
선분 AB의 수직이등분선을 직선 l이라 하면 직선 l위의 점에서 점 A까지의 거리와 점 B까지의 거리는 같다.

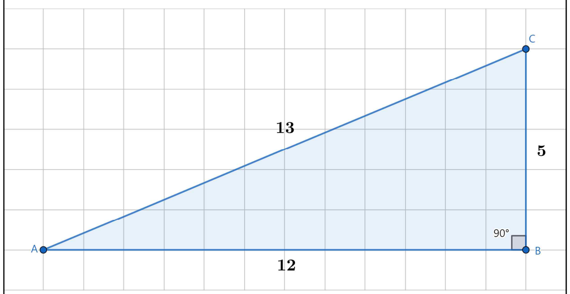
$\overline{AC}=\overline{BC}$
$\overline{AD}=\overline{BD}$
$\overline{AE}=\overline{BE}$

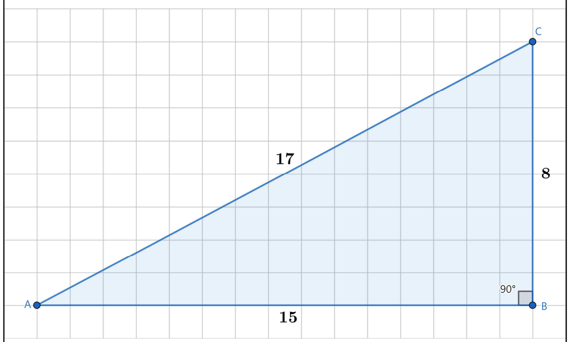
$\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ABE$는 모두 이등변삼각형이다.

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점들의 모임은 선분 AB의 수직이등분선이다.

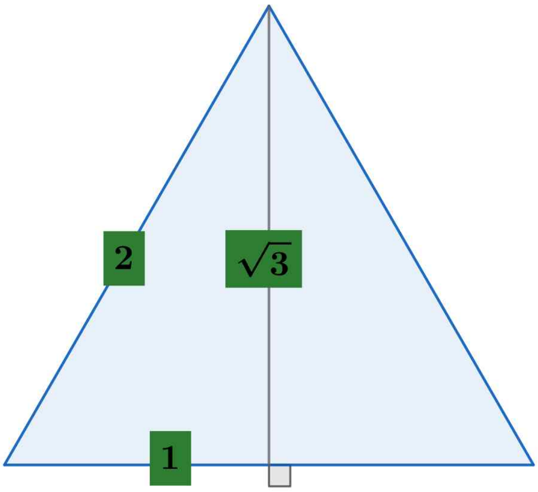
길이비가 정수비인 직각삼각형







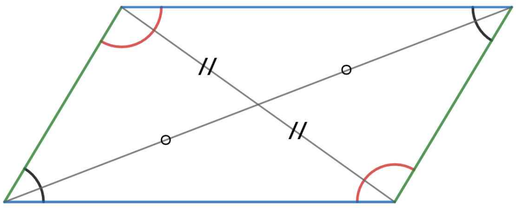
정삼각형 길이비



$1 : 2 : \sqrt{3}$

평행사변형

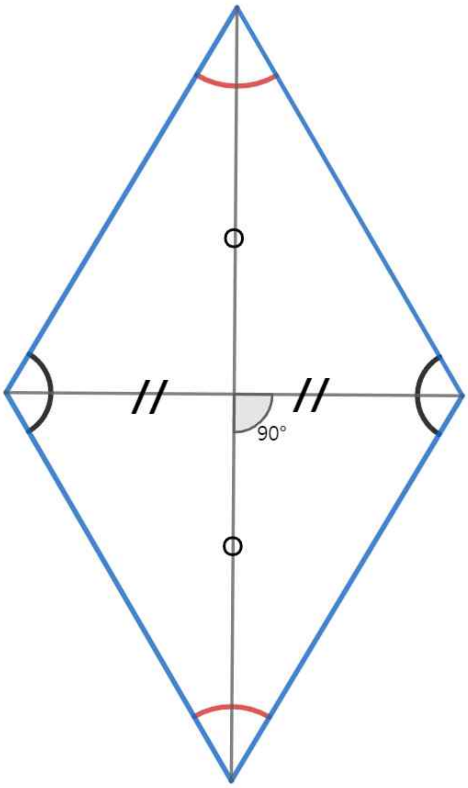
◈ 마주 보는 두 쌍의 대변이 서로 평행한 사각형



- 마주 보는 두 변의 길이는 각각 같다.
- 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
- 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분한다.

마름모

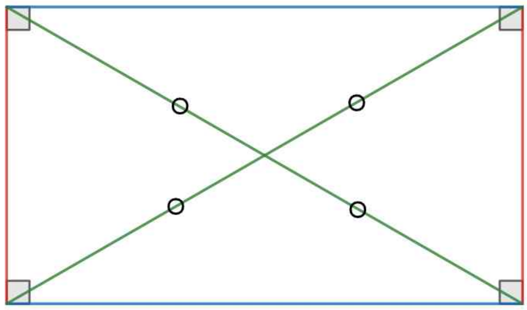
◈ 네 변이 모두 같은 평행사변형



- 마주 보는 두 변의 길이는 각각 같다.
- 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
- 두 대각선은 서로 다른 것을 **수직**이등분한다.

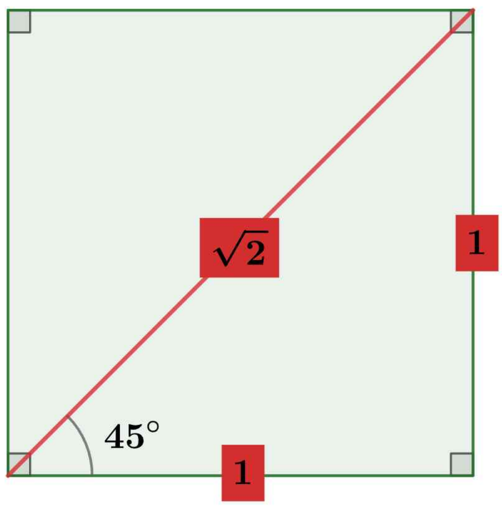
직사각형

◈ 네 각이 모두 같은 평행사변형



- 마주보는 두 변의 길이는 각각 같다.
- 두 쌍의 대각의 크기는 각각 같다.
- 두 대각선의 길이가 같다.

정사각형 길이비



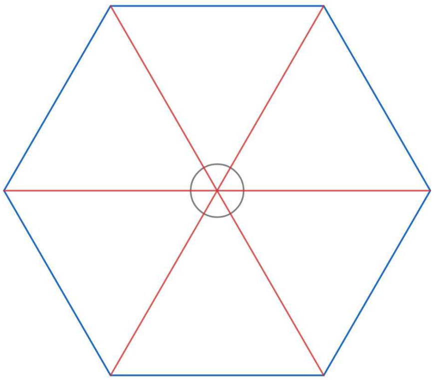
정사각형의 두 대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 수직이등분한다.

정사각형의 한 변과 대각선의 길이비는

$1 : \sqrt{2}$

다각형

◈ 다각형의 내각의 크기의 합



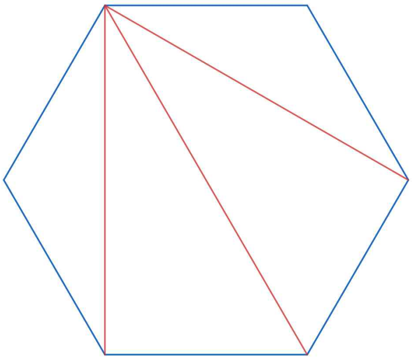
n각형은 내부의 한 점에서 n개의 삼각형을 그릴 수 있고 중심각의 크기는 360° 이므로

다각형의 내각의 크기의 합은

$(n-2)\times 180^\circ$

** 다각형의 외각의 크기의 합은 360°

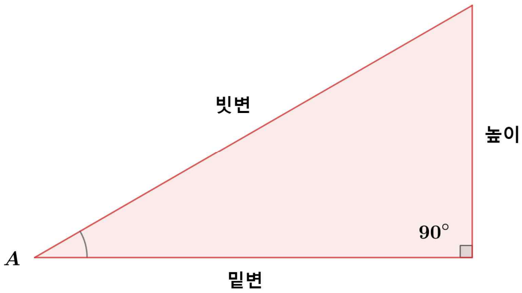
◈ 다각형의 대각선의 총 개수



다각형의 한 점에서 그을 수 있는 대각선의 개수는 $n-3$개(자기 자신과 인접한 두 점을 제외하고 대각선을 그을 수 있다.) 이므로

대각선의 총 개수는 $\dfrac{n(n-3)}{2}$개

삼각비

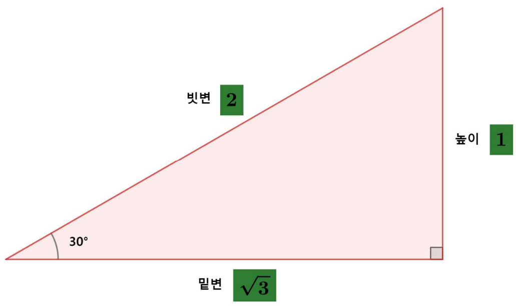


$\sin A = \dfrac{\text{높이}}{\text{빗변}}$

$\cos A = \dfrac{\text{밑변}}{\text{빗변}}$

$\tan A = \dfrac{\text{높이}}{\text{밑변}}$

특수각삼각비 : $30^\circ = \dfrac{\pi}{6}$

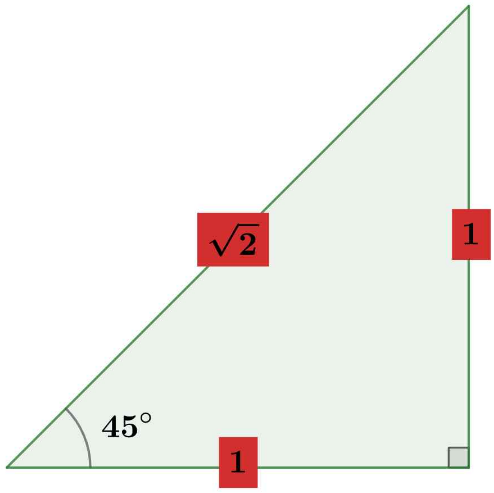


$\sin 30^\circ = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30^\circ = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 30^\circ = \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

특수각삼각비 : $45^\circ = \dfrac{\pi}{4}$



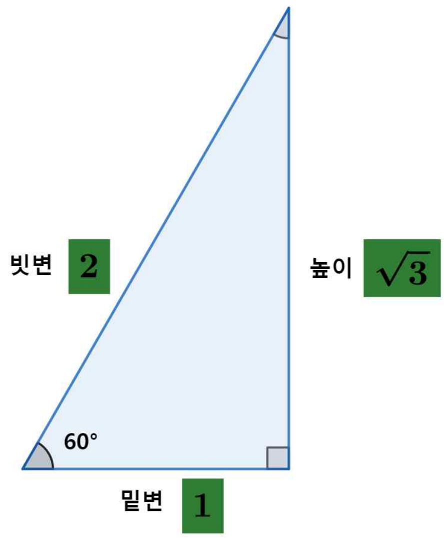
$\sin 45^\circ = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 45^\circ = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$

** 기울기가 ± 1인 직선의 방정식의
두 점 사이의 거리 구할 때도
$1 : 1 : \sqrt{2}$를 쓸 수 있다.

삼각비 : $60^\circ = \frac{\pi}{4}$



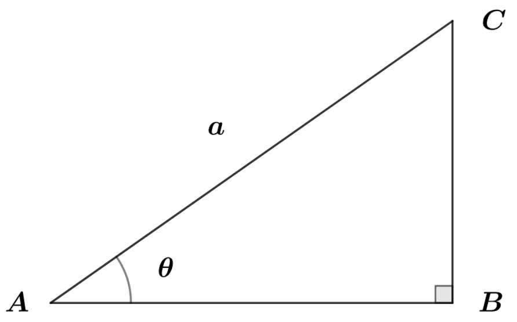
$\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

삼각비를 이용한 길이 구하기

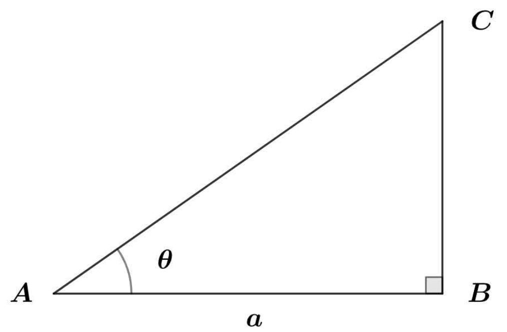


$\angle B = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC} = a$, $\angle CAB = \theta$라 하면

$\overline{AB} = a\cos\theta$, $\overline{BC} = a\sin\theta$

삼각비를 이용한 길이 구하기

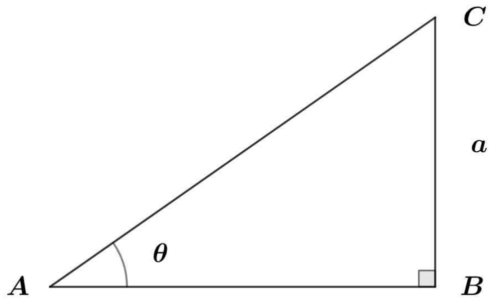


$\angle B = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AB} = a$, $\angle CAB = \theta$라 하면

$\overline{BC} = a\tan\theta$, $\overline{AC} = \frac{a}{\cos\theta}$

삼각비를 이용한 길이 구하기

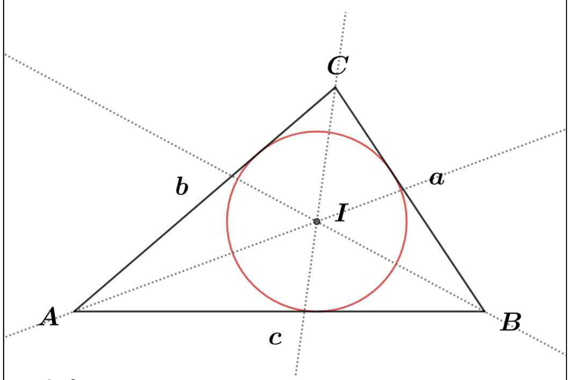


$\angle B = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서

$\overline{BC} = a$, $\angle CAB = \theta$라 하면

$\overline{AB} = \frac{a}{\tan\theta}$, $\overline{AC} = \frac{a}{\sin\theta}$

내심



내심

ABC에서 세 내각의 이등분선의 교점

내심의 성질

내심에서 각 변에 이르는 거리가 같다.

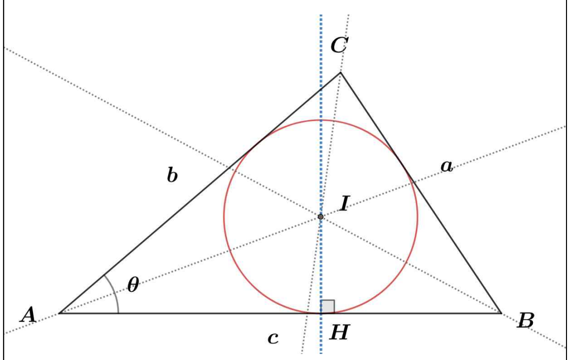
삼각형 ABC의 넓이는 삼각형

AIB, BIC, CIA 의 넓이의 합과 같다.

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r

이라 하면 삼각형 ABC넓이는

$\frac{1}{2} \times r \times (a+b+c)$

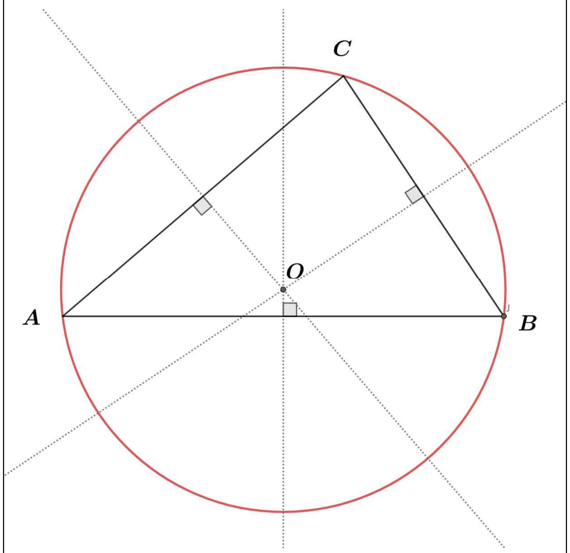


내심 I에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H,

$\angle CAB = \theta$라 하면

내접원의 반지름 $r = \overline{AH} \times \tan\frac{\theta}{2}$

외심

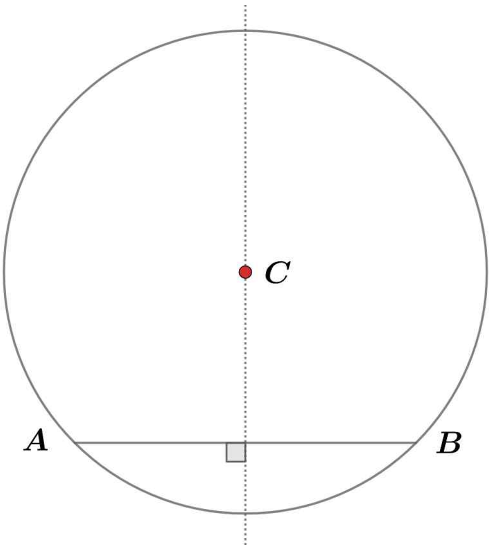


외심

ABC에서 세 변의 수직이등분선의 교점

외심의 성질

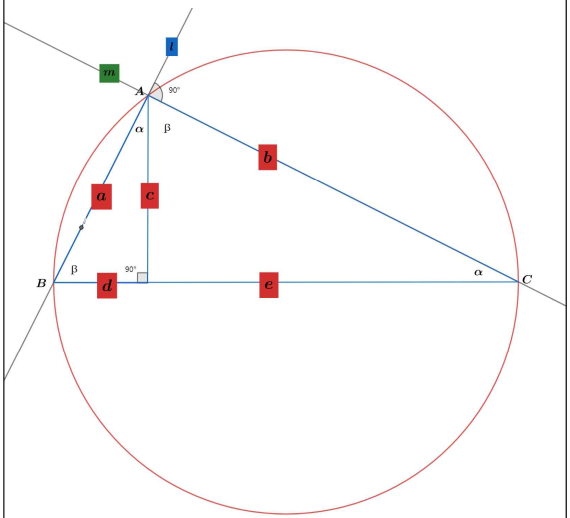
외심에서 각 꼭짓점에 이르는 거리가 같다.



원의 중심은 현의 수직이등분선 위에 있다.

특히 직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이다.

직각삼각형의 닮음과 원



$a^2+b^2=(d+e)^2$

$d : c = a : b$

$c^2=de,\ a^2=d(d+e),\ b^2=e(e+d)$

직선 l과 직선 m의 기울기의 곱 -1

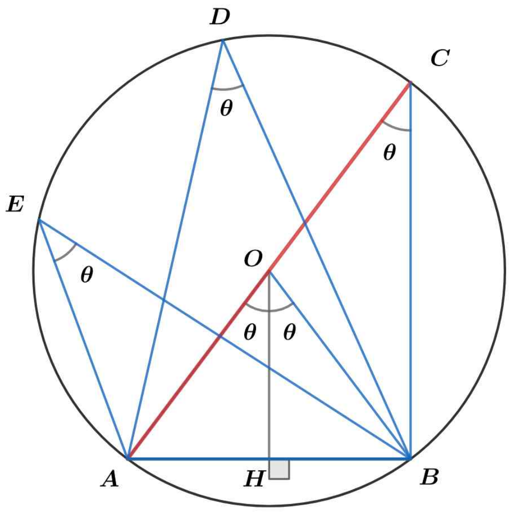
삼각형 ABC의 외접원의 지름은 $d+e$

삼각형 ABC의 외접원의 중심은

선분 BC의 중점

원

◈ 한 점(원의 중심)으로부터 같은 거리에 있는 점들의 모임



원의 중심 O

점 A, B, C, D, E는 원주 위의 점

점 H는 원 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발

현의 수직이등분선 위에 원의 중심이 있다.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=r$

선분 AC는 지름 $\overline{AC}=2r$

$\angle ABC=90^\circ=\dfrac{\pi}{2}$

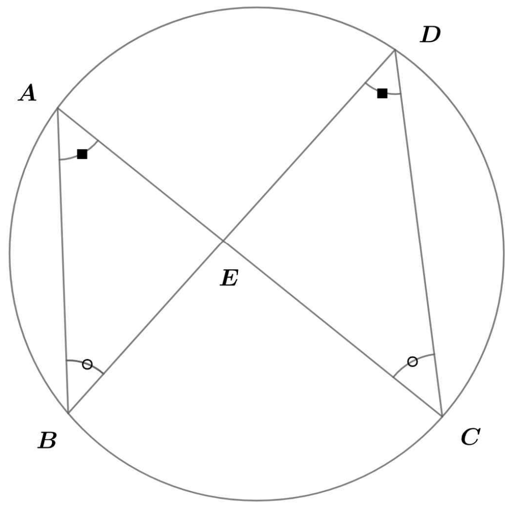
현 AB의 원주각

$\angle ACB=\angle ADB=\angle AEB=\theta$이면

$\angle AOB$는 현 AB의 중심각이고

$\angle AOB=2\theta,\ \angle AOH=\angle BOH=\theta$

원과 비례

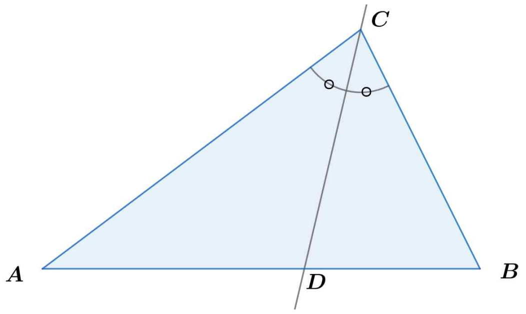


그림과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 원의 원주 위에 있고 선분 AC와 선분 BD의 교점을 E라 하면 삼각형 EAB와 삼각형 EDC는 닮은 삼각형이므로

$\overline{AE} : \overline{BE} = \overline{DE} : \overline{CE}$이다.

$\therefore \overline{AE}\times\overline{CE}=\overline{BE}\times\overline{DE}$

각의 이등분선의 성질



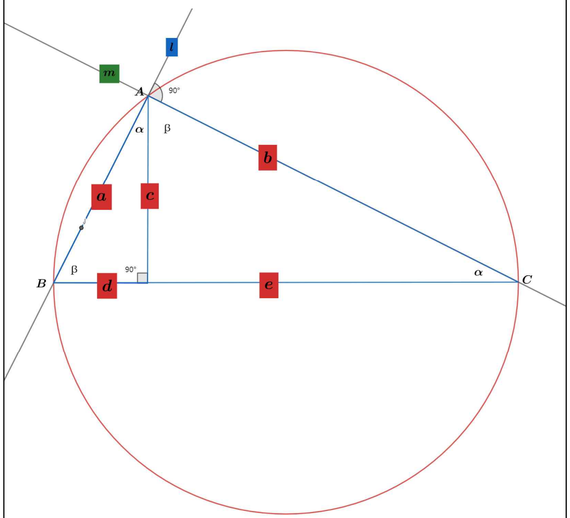
$\angle C$의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{CA} : \overline{CB} = \overline{AD} : \overline{DB}$

$$\overline{AD} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \times \overline{AB}$$

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC} + \overline{BC}} \times \overline{AB}$$

직각삼각형의 닮음과 원



$a^2 + b^2 = (d+e)^2$

$d : c = a : b$

$c^2 = de,\ a^2 = d(d+e),\ b^2 = e(e+d)$

직선 l과 직선 m의 기울기의 곱 -1

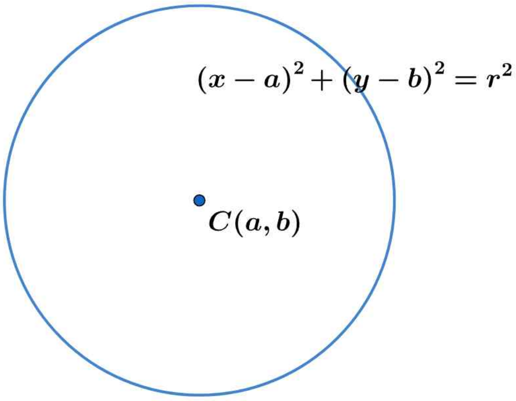
삼각형 ABC의 외접원의 지름은 $d+e$

삼각형 ABC의 외접원의 중심은 선분 BC의 중점

원의 방정식

◈ 원의 방정식

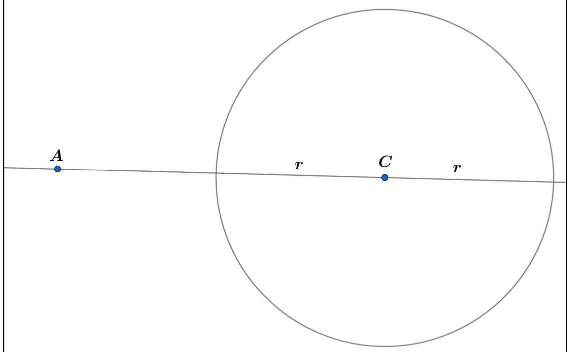
- 좌표평면에서 중심이 점 $C(a,\ b)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$



원점이 중심이고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식 $x^2+y^2=r^2$

$x^2+y^2=r^2$ 위의 한 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$

원 밖의 한 점에서 원까지의 거리의 최대 최소

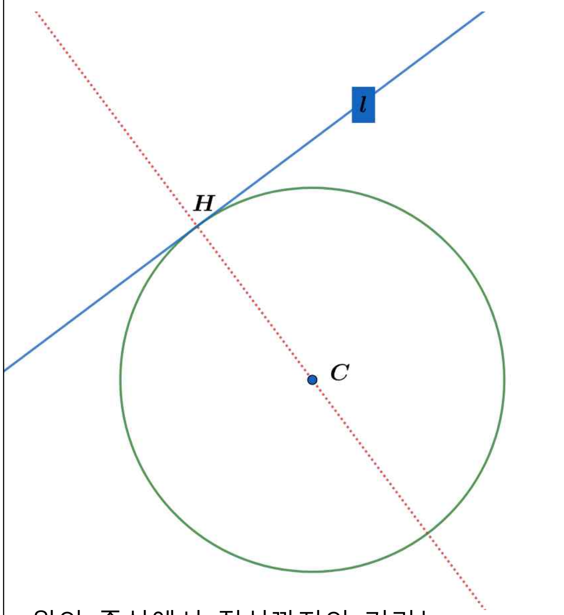


최대 : $\overline{AC}+r$

최소 : $\overline{AC}-r$

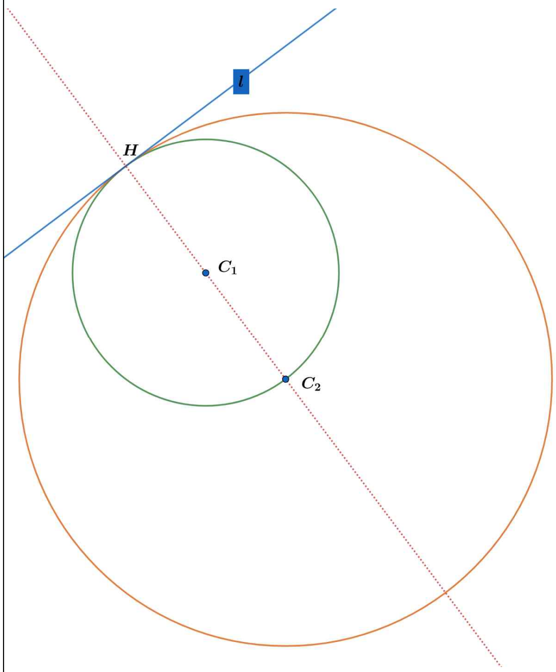
** 원 문제는 항상 원의 중심에서부터 접근해본다.

원과 접선



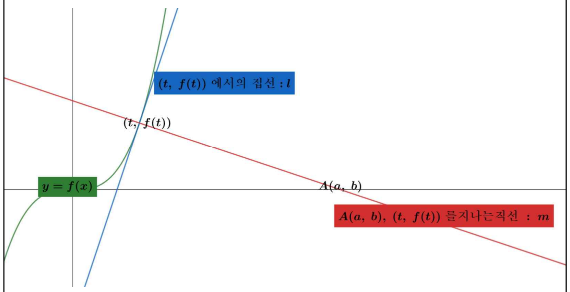
원의 중심에서 접선까지의 거리는 반지름의 길이와 같다.

두 원이 접할 때



두 원이 접하면 접점과 두 원의 중심은 일직선상에 있다.

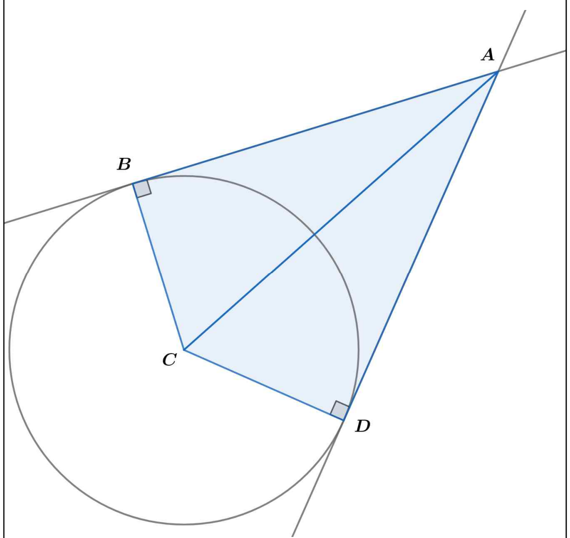
한 점에서 곡선까지의 거리가 최소



직선 l 과 직선 m이 곡선 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 수직으로 만날 때, 곡선 밖의 한 점(a, b)에서 곡선까지의 거리가 최소이다.

$$\frac{f(t)-b}{t-a}\times f'(t)=-1$$

원 밖의 한 점에서 원에 두 접선을 그을 때



$\triangle ABC$와 $\triangle ADC$는 합동이다.

$\overline{AB}=\overline{AD}$

$\angle CAB=\angle CAD$

원과 직선의 위치관계

◈ $\begin{cases} y = mx + n \\ f(x,\ y) = 0 \end{cases}$ 의 위치관계

- $f(x,\ y) = 0$에 $y = mx + n$을 대입하면 $f(x,\ mx + n) = 0$은 이차방정식이다.
  $D > 0$이면 서로 다른 두 점
  $D = 0$이면 접한다
  $D < 0$이면 만나지 않는다.
- 원 $f(x,\ y) = 0$(반지름 : r)의 중심에서 직선 $y = mx + n$까지의 거리를 d
  $d < r$이면 서로 다른 두 점
  $d = r$이면 접한다.
  $d > r$이면 만나지 않는다.

◈ 원의 접선의 방정식

- 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$ 에서의 접선의 방정식
  $x_1 x + y_1 y = r^2$
- 원 $x^2 + y^2 = r^2$에 접하고 기울기가 m이 직선의 방정식
  $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

두 원의 위치관계

◈ 두 원의 위치관계

두 원의 반지름의 길이가 각각 $r,\ r'$이고 중심 사이의 거리가 d

- $r + r' < d$ 만나지 않는다.
- $r + r' = d$ 외접한다.
- $|r - r'| < d < r + r'$ 두 점에서 만난다.
- $|r - r'| = d$ 내접한다.
- $|r - r'| > d$ 만나지 않는다.

◈ 두 원의 교점을 지나는 원과 직선

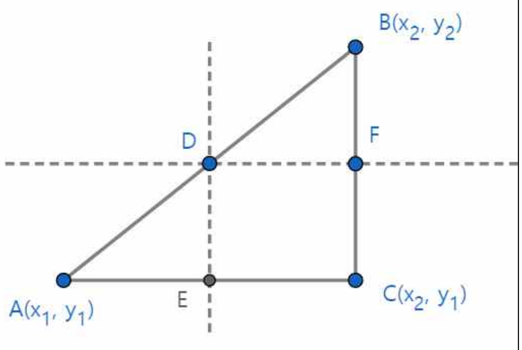
- $\begin{cases} x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \\ x^2 + y^2 + A'x + B'y + C' = 0 \end{cases}$
  의 교점을 지나는 원의 방정식
  $x^2 + y^2 + Ax + By + C$
  $+ k(x^2 + y^2 + A'x + B'y + C') = 0$
  $(k \neq -1)$
  $k = -1$ 이면 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식이다.

산술평균과 기하평균

◈ 양수조건, 합 또는 곱이 일정할 때 최댓값 또는 최솟값 구하기 위해 쓴다.

- $x > 0, y > 0$일 때,
  $\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}$
- $t > 0$
  $t + \frac{1}{t} \geq 2$

좌표평면 위의 선분의 내분점



◈ 좌표평면 위의 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점 D의 좌표

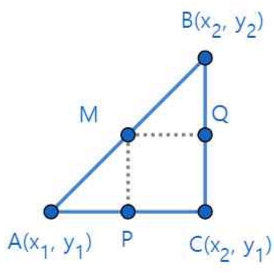
점 E는 수직선 위의 선분 AC를 $m:n$으로 내분하므로

$$E\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\, y_1\right)$$

점 F는 수직선 위의 선분 CB를 $m:n$으로 내분하므로

$$F\left(x_2,\, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$

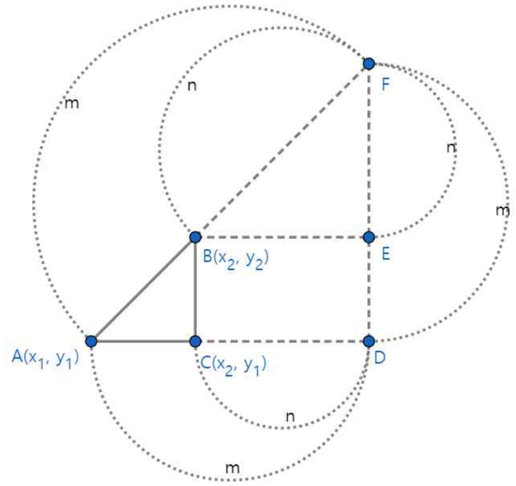
$$D\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$$



◈ 좌표평면 위의 선분 AB의 중점의 좌표 M은 선분 AB를 $1:1$로 내분하므로

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

좌표평면 위의 선분의 외분점



◈ 좌표평면 위의 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 F의 좌표$(m>n>0)$

점 D는 수직선 위의 선분 AC를 $m:n$으로 외분하므로

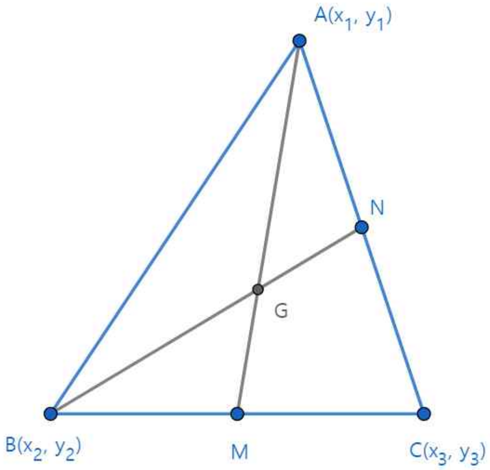
$$D\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\, y_1\right)$$

$$E\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\, y_2\right)$$

점 F는 수직선 위의 선분 DE를 $m:n$으로 내분하므로

$$F\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n},\, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$$

무게중심의 좌표



M은 선분 BC의 중점이므로

$$M\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right)$$

무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

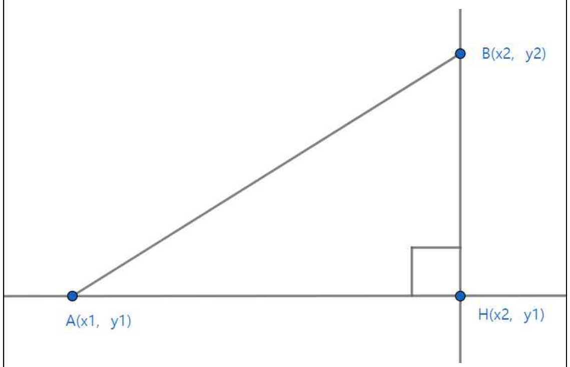
$$G\left(\frac{2\times\frac{x_2+x_3}{2}+x_1}{2+1},\ \frac{2\times\frac{y_2+y_3}{2}+y_1}{2+1}\right)$$
$$=G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

두 점 사이의 거리

◈ 좌표평면 위의 두 점

$A(x_1,\ y_1),\ B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리

- $\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
- $\overline{OA}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$ (O는 원점)



$\overline{AH}=x_2-x_1$ **이고 삼각형** ABH**는**
$\overline{BH}=y_2-y_2$

$\angle AHB=90^\circ$ **인 직각삼각형이므로**

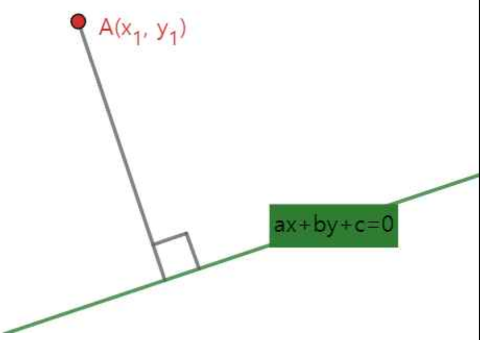
피타고라스의 정리에 의해

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

점과 직선 사이의 거리

◈ 점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리

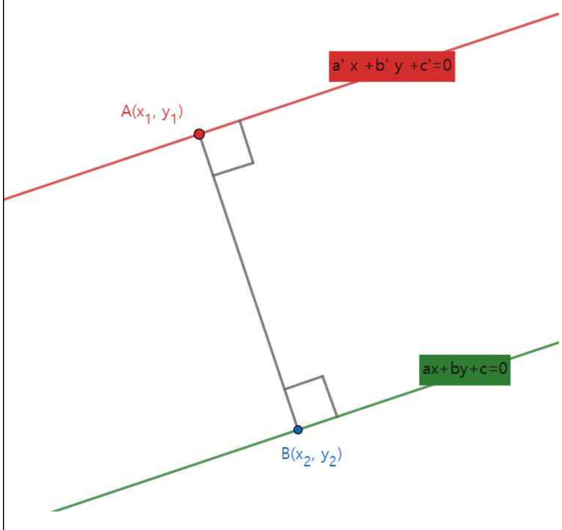
- 한 점에서 직선까지 최단거리를 '점과 직선 사이의 거리' 라고 한다.



- 점과 직선 사이의 거리 공식

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

◈ 평행한 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 두 직선 사이의 거리

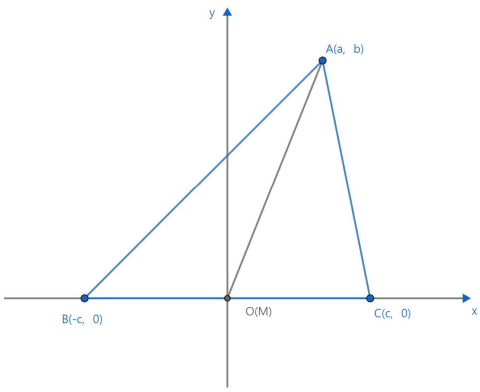


한 쪽 직선 위의 한 점을 찾은 다음 다른쪽 직선까지의 거리를 구하면 된다.

파푸스 중선정리

◈ 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$



$A(a, b),\ B(-c, 0),\ C(c, 0)$

$$\overline{AB}^2=(a+c)^2+b^2$$
$$\overline{AC}^2=(a-c)^2+b^2$$
$$\overline{AM}^2=a^2+b^2$$
$$\overline{BM}^2=c^2$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+c^2$$

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

직선의 방정식 구하기

◈ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식

- $y-y_1=m(x-x_1)$

◈ 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식

- $x_1=x_2$일 때, $x=x_1$
- $x_1\neq x_2$일 때

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

(단, $y_1=y_2$일 때, $y=y_1$)

◈ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식 (단, $a\neq 0,\ b\neq 0$)

- $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

◈ $y=ax+b$의 그래프

- $a=\tan\theta$

  단, θ는 x축의 양의 방향과 이루는 각도

일차함수 기울기

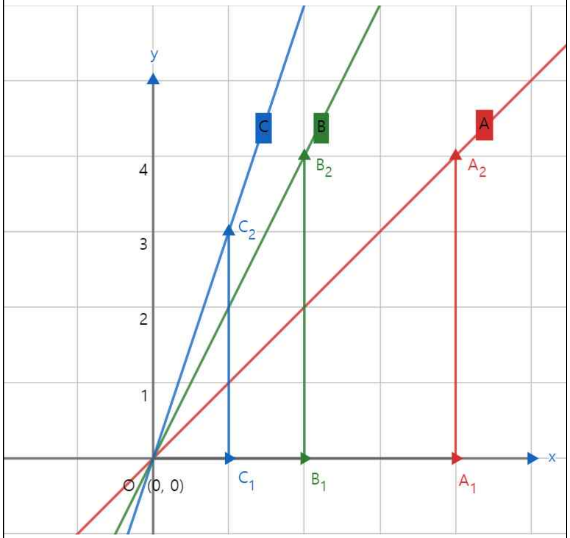
◈ 기울기

- 서로 다른 두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 평균변화율

  $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

- x증가량에 대한 y증가량

- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$



$A:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{4}=\frac{3}{3}=1$

$B:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4}{2}=\frac{2}{1}=2$

$C:\ \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3}{1}=3$

기울기는 반시계방향으로 갈수록 커진다.

기울기의 절댓값이 클수록 y축에 가깝다.

일차함수

◈ 일차함수

$y = ax + b$

$a \neq 0$이고 a는 기울기, b는 y절편이다.

◈ y절편

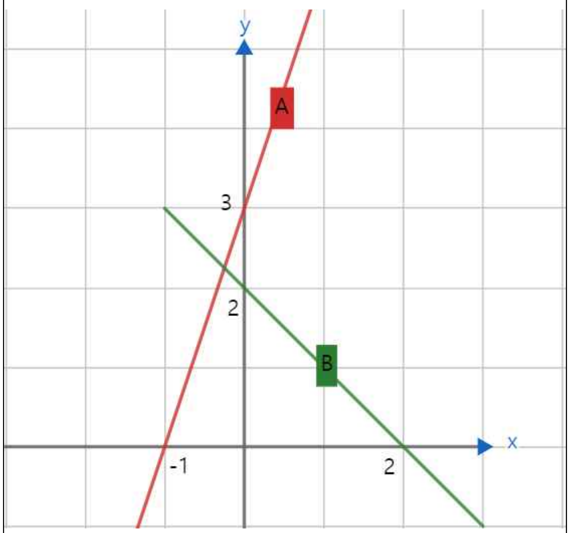
y축과 만나는 점의 y좌표

일차함수 $y = ax + b$에서 y절편 : b

◈ x절편

x축과 만나는 점의 x좌표

일차함수 $y = ax + b$에서 x절편 : $-\dfrac{b}{a}$



A : $y = 3x + 3$

x절편 -1, y절편 3

B : $y = -x + 2$

x절편 2, y절편 2

함수의 용어

◈ 함수의 정의역, 공역과 치역

- $f : X \to Y$ 일 때,

집합 X를 함수 f의 정의역

집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.

- $f : X \to Y$ 일 때,

함수 f에 의하여 정의역 X의 원소

x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때,

$y = f(x)$로 표현하며

$f(x)$를 x에서의 함숫값이라 한다.

- $f : X \to Y$ 일 때,

$\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의

치역이라 한다.

◈ 함수가 같다.

- 두 함수 f, g에 대하여

ㄱ. 정의역과 공역이 각각 서로 같고

ㄴ. 정의역의 모든 원소 x에 대하여

$f(x) = g(x)$

를 만족시킬 때, 두 함수 f, g는

서로 같다고 하며, 기호 $f = g$라

표현한다.

일대일 함수와 일대일 대응

◈ 일대일 함수

- 함수 $f: X \to Y$ 에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라 한다.

◈ 일대일 대응

- 함수 $f: X \to Y$ 가 일대일함수이고, 치역과 공역이 같으면 함수 f를 일대일 대응이라한다.

역함수 구하는 방법

◈ 역함수의 표현

- 일반적으로 함수를 나타낼 때, 정의역의 원소를 x, 함숫값을 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$도 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

◈ 역함수 구하는 방법

- 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재할 때,

  ㄱ. $y=f(x)$를 x에 관하여 푼다.

  ㄴ. $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾼다.

  ㄷ. $y=f^{-1}(x)$

역함수 존재 조건과 정의

◈ 역함수는 일대일 대응일 때 존재한다.

◈ $f(g(x))=x$

역함수 표현

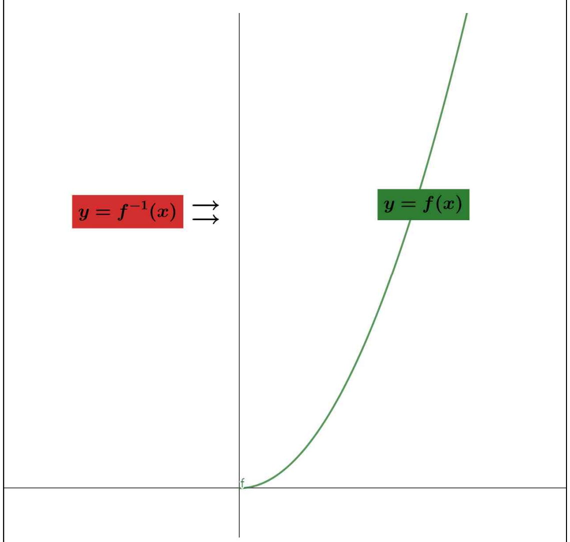
◈ 함수 $y=f(x)$의 위에 점 $(g(t), t)$가 있을 때, 함수 $y=g(x)$는 함수 $y=f(x)$의 역함수이다.

함수와 그 역함수의 그래프

◈ 함수와 그 역함수의 그래프

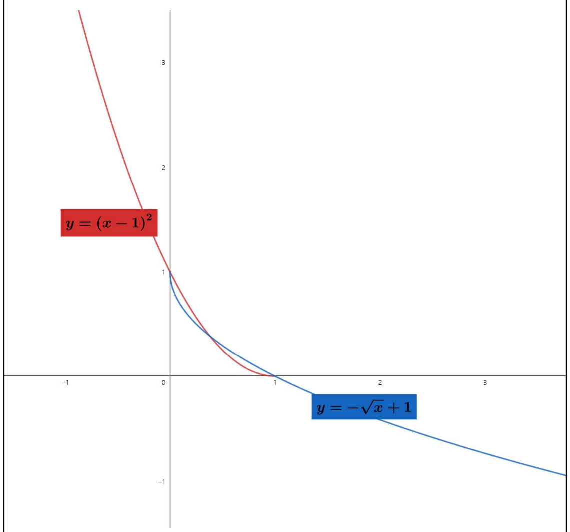
- 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

역함수는 y축에서 바라본 함수이다.



역함수 오개념 피하기

◈ 감소함수의 경우에 $\begin{cases} y=f(x) \\ y=f^{-1}(x) \end{cases}$ 의 교점은 $y=x$위가 아닌 곳에 생길 수 있다.



순서쌍 개수 구하기

◈ 약수와 배수

◈ (정수, 정수)인 점 생각하기

◈ 하나를 고정시키기

절댓값

◈ 실수 a의 절댓값의 정의

수직선 상에서 한 점 $A(a)$로부터

원점$O(0)$ 까지의 거리

$a \geq 0$이면 $|a|=a$

$a<0$이면 $|a|=0-a=-a$

◈ $|x-a|$

$x \geq a$이면 $|x-a|=x-a$

$x<a$이면 $|x-a|=a-x$

◈ 절댓값의 성질 : a, b가 실수일 때

$|a| \geq 0$

$|-a|=|a|$

$|a|^2=a^2,$

$|a||b|=|ab|$

$\dfrac{|a|}{|b|}=\left|\dfrac{a}{b}\right|(b \neq 0)$

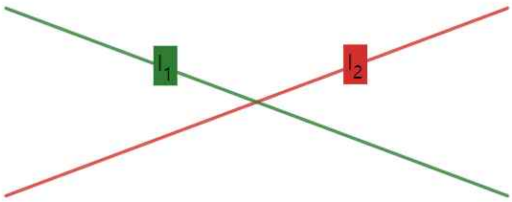
연립방정식

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ **의 해**

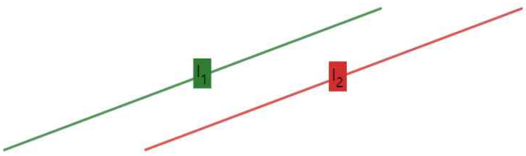
◈ 두 직선 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의

교점의 x, y좌표는

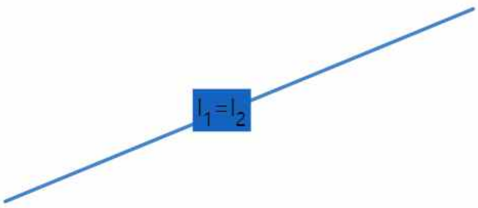
연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ 의 해



한 쌍의 해를 갖는다. (기울기가 다르다)



해가 존재하지 않는다. (평행)



해가 무수히 많다. (일치)

방정식과 일차방정식

◈ 일차방정식 $ax=b$

- $a\neq 0$ 이므로 $x=\dfrac{b}{a}$

◈ 방정식 $ax=b$

1) $a\neq 0$ 이면 $x=\dfrac{b}{a}$

2) $a=0$, $b=0$이면 해가 무수히 많다

3) $a=0$, $b\neq 0$ 이면 해가 없다.

방정식과 이차방정식

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$

- 이차방정식이라고 하면 $a\neq 0$

◈ 방정식 $ax^2+bx+c=0$

- 1) $a=0$ 으로 나눠서 생각 한다.
  2) $a\neq 0$

방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이

◈ 방정식 $ax^2+bx+c=0$

- $a=0$ 인지 $a\neq 0$인지를 확인한다.
- $a=0$ 이면 방정식 $bx+c=0$을 푼다.
- $a\neq 0$ 이면

  이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 푼다.

이차방정식의 풀이

a, b, c는 실수

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 풀이

1) 인수분해가 되는지 확인한다.
2) 인수분해가 안되면
   근과 계수와의 관계를 생각한다.
3) 근의 공식을 생각한다.

이차방정식의 근의 공식 유도

a, b, c는 실수

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
근의 공식 유도

$a \neq 0$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이차방정식의 근의 판별

a, b, c는 실수

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의
근의 판별

근의 공식에서 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

에서 $b^2-4ac \geq 0$이면 실수
$b^2-4ac<0$이면 허수이므로

1) 실근 가질 조건
   $b^2-4ac \geq 0$

2) 서로 다른 두 실근 가질 조건
   $b^2-4ac>0$

3) 중근 가질 조건
   (해를 하나만 가질 조건)
   $b^2-4ac=0$

3) 허근 가질 조건
   (서로 다른 두 허근 가질 조건)
   $b^2-4ac<0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계

a, b, c는 실수

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근과 계수와의 관계

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해가 α, β라면
$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이므로
좌변과 우변의 계수를 비교하면
다음과 같음을 알 수 있다.

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

이차방정식의 켤레근

◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$

- a, b, c가 **유리수**일 때,
  $p+\sqrt{q}$가 해이면 $p-\sqrt{q}$도 해
  (단, p, q는 유리수, $\sqrt{q}$는 무리수)

- a, b, c가 실수일 때,
  $p+qi$가 해이면 $p-qi$도 해
  (단, p, q는 실수, $q\neq 0$, $i=\sqrt{-1}$)

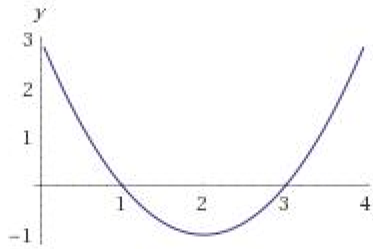
이차방정식과 이차함수의 관계

◈ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 x축과의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근이다.

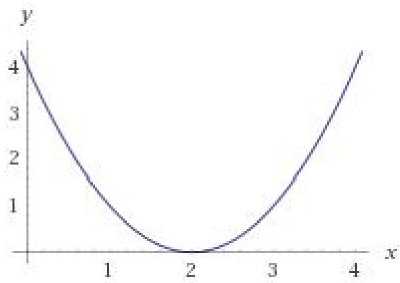
◈ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 $D=b^2-4ac$의 부호에 따른 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프

$a>0$일 때

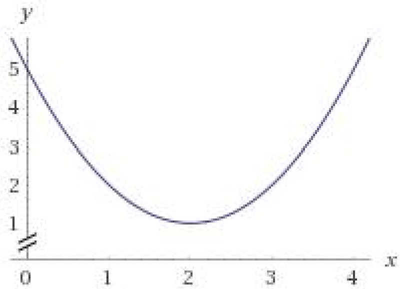
- $D>0$



- $D=0$



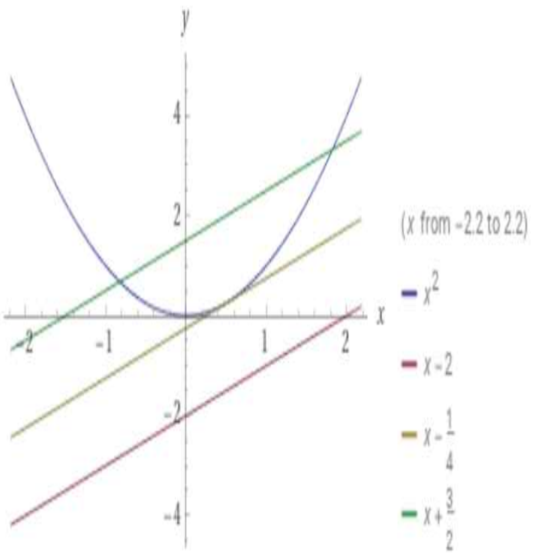
- $D<0$



이차함수의 그래프와 직선의 위치관계

◈ 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치관계는 이차방정식 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식 D이 부호에 따라 결정된다.

- $D>0$이면 서로 다른 두 점에서 만난다.
- $D=0$이면 접한다.
- $D<0$이면 만나지 않는다.



이차방정식의 실근의 부호

◈ 이차방정식의 실근의 부호

이차함수의 그래프를 그려서 x축 과의 교점에 대해서 생각해본다.

판별식

$D=b^2-4ac$

$D/4=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$ (b는 짝수일 때)

특정한 값을 대입하여 부호를 생각한다.

대칭축을 생각한다.

$y=ax^2+bx+c$의 대칭축은 $x=-\frac{b}{2a}$

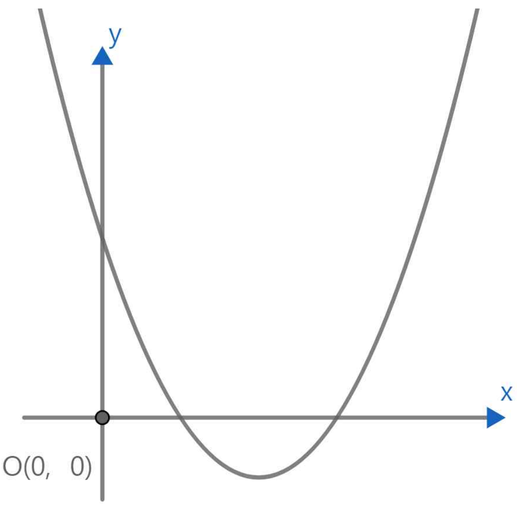
이차방정식의 실근의 부호

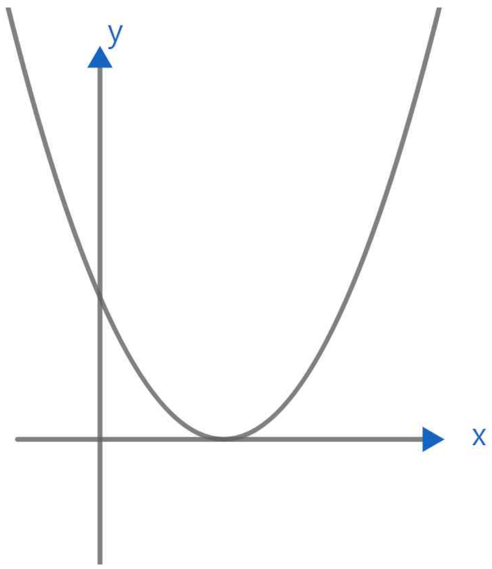
◈ a, b, c는 실수인 $(a > 0)$

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의

두 실근이 모두 양수일 조건

다음 두가지 케이스가 모두 해당하므로





$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$D \geq 0,\ f(0) > 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0$

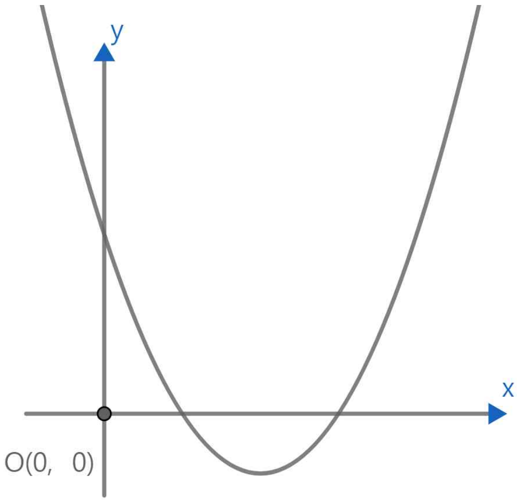
이차방정식의 실근의 부호

◈ a, b, c는 실수인

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의

두 실근을 α, β라 할 때

- 서로 다른 두 근이 모두 양수일 조건



$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면

$D > 0,\ f(0) > 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0$

외우려고 하지말고 이차함수 그래프를 그려서 눈으로 확인한 후 수식을 정리한 후 문제를 푼다.

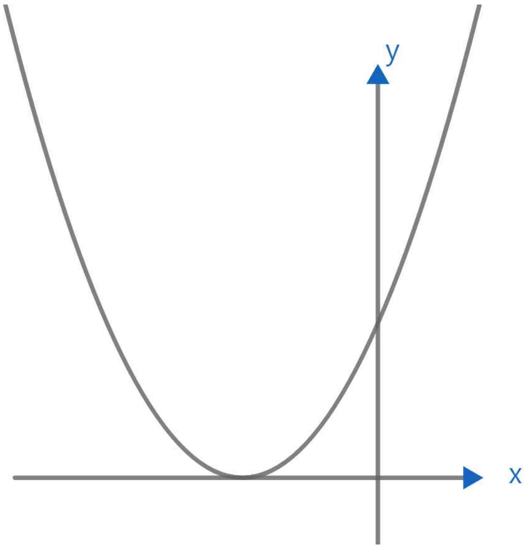
이차방정식의 실근의 부호

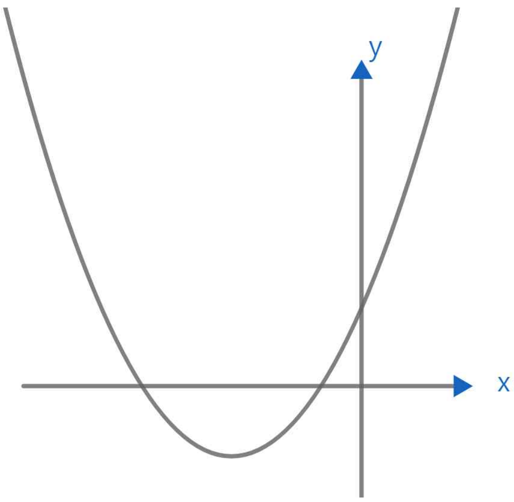
◈ a, b, c는 실수인 ($a>0$)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의

두 실근이 모두 음수일 조건

다음 두가지 케이스가 모두 해당하므로





$f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면

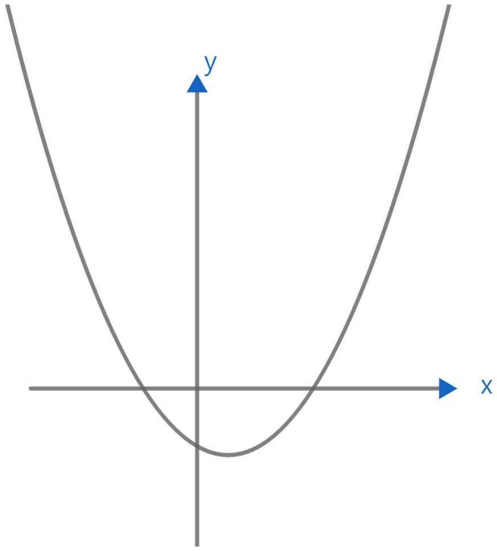
$D\geq 0,\ f(0)>0,\ -\dfrac{b}{2a}<0$

이차방정식의 실근의 부호

◈ a, b, c는 실수인 ($a>0$)

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의

두 실근이 한 근은 양수 한 근은 음수



$f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면

$f(0)<0$

$a>0,\ c<0$ 이므로

$D=b^2-4ac>0$ 이므로 판별식은

안써도 된다.

***** 이차함수의 대칭축

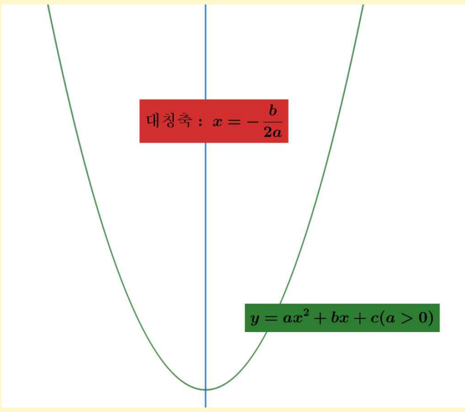
◈ 이차함수 관련된 문제는 대칭축에서부터 생각하는 문제가 많다.

$y=ax^2+bx+c$ 이므로

$=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$

함수 $y=ax^2+bx+c$의 대칭축은

$x=-\dfrac{b}{2a}$ 이다.



* 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 대칭축은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 의 앞부분 $x=-\dfrac{b}{2a}$을 기억해도 된다.

이차방정식의 두 근은 $x=-\dfrac{b}{2a}$를 기준으로 대칭이다.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계

◈ 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

ax^3+bx^2+cx+d 이고
$=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

다항식의 나눗셈

◈ 다항식의 나눗셈에 대한 등식

다항식 $f(x)$를 다항식 $g(x)$로 나누었을 때 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 하면

$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$

단, $g(x)\neq 0$이고

$R(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 작다.

또한 $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$은 x에 대한 항등식이다.

인수분해

◈ 인수분해 순서

1) 공통인수로 묶는다.
2) 곱셈공식을 활용한다.
3) 식을 적당히 치환하여 곱셈공식을 활용할 수 있는지 확인한다.
4) 문자가 여러 개 포함된 식의 인수분해
   - 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다.
   - 차수가 같을 때에는
     계수가 양수인 문자,
     계수가 작은 문자에 대하여
     내림차순으로 정리한 후에
     인수분해 한다.

등식의 종류

◈ 항등식

문자를 포함한 등식에서 그 문자에
어떠한 값을 대입해도 항상 참인 등식

- 항등식의 표현
  1) 모든 x에 대하여 성립하는 등식
  2) 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
  3) x의 값에 관계없이 성립하는 등식
  4) 어떤 x에 대하여도 항상 성립하는 등식

  "성립하는 등식" 대신
  " 항상 참인 등식" 이라고 표현
- 항등식의 계수 정하는 방법
  1) 계수 비교법
     - 항등식의
       양변의 동류항의 계수는 같다.
       * 동류항 : 같은 문자에 대하여
         차수가 같은 항
  2) 수치 대입법

◈ 방정식

문자를 포함한 등식에서 그 문자에
어떠한 값을 대입했을 때,
참이 되기도 하고 거짓이 되기도 하는
등식

- 방정식을 푼다
  등식을 참으로 만드는 숫자를 찾는다.
  이 때, 이 숫자를 방정식의 "해" 또는
  "근" 이라고 한다.

나머지 정리

◈ 나머지 정리

- 다항식 $f(x)$를 x에 대한 일차식 $x-\alpha$로 나눈 나머지는 $f(\alpha)$
- 다항식 $f(x)$를 x에 대한 일차식 $ax+b$로 나눈 나머지는 $f\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

인수정리

◈ 인수정리

- 다항식 $f(x)$가 x에 대한 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어지면 $f(\alpha)=0$
- 또, 역으로 $f(\alpha)=0$이면

  다항식 $f(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어 떨어지고

  $f(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 갖고

  $f(x)=(x-\alpha)Q(x)$
- 삼차 이상의 다항식의 인수분해는 인수정리를 이용하여 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

  1) 다항식의 식의 값을 0으로 만드는 숫자를 찾는다.
     - 상수항을 최고차항의 계수로 나눈 숫자의 $\pm$약수를 작은 수부터 대입하여 찾는다.
  2) 이차 이하의 식이 나올 때까지 위의 과정을 반복한다.

제곱근의 성질

◈ $a>0,\ b>0$일 때

- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

◈ $a>0,\ b<0$일 때

- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

◈ $a<0,\ b>0$일 때

- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

◈ $a<0,\ b<0$일 때

- $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

부등식의 성질과 일차부등식의 해법

◈ 부등식의 성질

- $a > b,\ b > c$이면 $a > c$
- $a > b$이면 $a+m > b+m$,
  $a-m > b-m$
- $a > b,\ m > 0$이면 $am > bm,\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m}$
- $a > b,\ m < 0$이면 $am < bm,\ \dfrac{a}{m} < \dfrac{b}{m}$
- a와 b가 서로 같은 부호이면
  $ab > 0,\ \dfrac{a}{b} > 0,\ \dfrac{b}{a} > 0$
- a와 b가 서로 다른 부호이면
  $ab < 0,\ \dfrac{a}{b} < 0,\ \dfrac{b}{a} < 0$

◈ 부등식 $ax > b$의 해

- $a > 0$이면 $x > \dfrac{b}{a}$
- $a < 0$이면 $x < \dfrac{b}{a}$
- $a = 0$이면
  $\begin{cases} b \geq 0 \text{ 이면 해가 없다} \\ b < 0 \text{ 이면 } x\text{는 모든실수} \end{cases}$

도형의 평행이동

◈ 점의 평행이동

- 좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$를
  x축의 방향으로 a만큼, y축의
  방향으로 b만큼 평행이동 시킨 점
  $(x+a,\ y+b)$
  $T:(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 로 표현

◈ 도형의 평행이동

- 좌표평면 위의 도형 $f(x,\ y)=0$을
  $T:(x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$에 의하여
  평행이동한 도형의 방정식은
  $f(x-a,\ y-b)=0$

도형의 대칭이동

◈ 점의 대칭이동

- x축에 대한 대칭이동
  $T:(x,\ y) \to (x,\ -y)$
- y축에 대한 대칭이동
  $T:(x,\ y) \to (-x,\ y)$
- 원점에 대한 대칭이동
  $T:(x,\ y) \to (-x,\ -y)$
- 직선 $y=x$에 대한 대칭이동
  $T:(x,\ y) \to (y,\ x)$

◈ 도형의 대칭이동

- x축에 대한 대칭이동
  $f(x,\ y)=0 \to f(x,\ -y)=0$
- y축에 대한 대칭이동
  $f(x,\ y)=0 \to f(-x,\ y)=0$
- 원점에 대한 대칭이동
  $f(x,\ y)=0 \to f(-x,\ -y)=0$
- 직선 $y=x$에 대한 대칭이동
  $f(x,\ y)=0 \to f(y,\ x)=0$

함수의 종류(선대칭과 점대칭)

$f(x+a)=f(x)$ 주기함수

$f(-x)=f(x)$ 우함수

$f(-x)=-f(x)$기함수

$f(a-x)=f(a+x)$ $x=a$에 대한 선대칭

$f(a+x)+f(a-x)=2f(a)$

$(a,\, f(a))$에 대한 점대칭

$y=f(x)-t$의 그래프

1. $y=f(x)$의 그래프를 그린다.

2. $y=t$를 x축으로 생각한다.

****$y=f(x)-f(\alpha)$의 그래프도 마찬가지로 $y=f(x)$의 그래프를 그린 다음 $y=f(\alpha)$를 x축으로 생각한다.**