#1 집합과 원소

◈ 집합

- 대상이 명확한 것들의 모임

◈ 원소

- 집합을 이루는 대상 하나하나

◈ 집합과 원소의 표현

$a \in A$: a가 집합 A의 원소이다.

$a \notin A$: a가 집합 A의 원소가 아니다.

◈ 공집합

- 원소가 하나도 없는 집합으로
  기호{ }또는 ϕ로 표현한다.

◈ 집합의 표현 방법

- 원소나열법
  집합에 속하는 원소를 기호 { }안에
  하나하나 모두 나열하여 나타내는 방법
- 조건제시법
  기호 { }안에 { | }과 같이
  세로줄 '|'를 그어 세로줄의
  왼쪽에 표현하려는 대상을,
  오른쪽에 그 대상들이 가지는
  공통적인 성질을 써서 나타내는 방법
- 벤다이어그램
  집합 사이의 포함관계를 알기 쉽게
  그림으로 나타낸 것

#2 집합의 원소의 개수

◈ 원소의 개수에 따른 집합의 분류

- 유한집합 : 원소가 유한개인 집합
- 무한집합 : 원소가 무수히 많은 집합
- 공집합 : 원소가 하나도 없는 집합
  $\varnothing$, { }

◈ $n(A)$

- 유한 집합 A의 원소의 개수
- $n(\phi)=0$

#3 집합 사이의 포함 관계

◈ 부분집합

- 집합 A의 모든 원소가 집합 B에
  속할 때, 집합 A를 집합 B의
  부분집합이라고 하고
  $A \subset B$로 표현한다.
- 공집합 ϕ는 모든 집합의 부분집합
- 어떤 집합도 자기 자신의 부분집합
- $A \subset B$이고 $B \subset C$이면 $A \subset C$
- 부분집합의 개수
  일반적으로 원소의 개수가
  $n(n \neq 0)$인 집합의 부분집합의
  개수는 2^n

◈ 부분집합이 아니다

- 집합 A의 원소 중에서 집합 B에
  속하지 않는 원소가 있을 때
  집합 A가 집합 B의 부분집합이
  아니라고 하고 $A \not\subset B$로 표현한다.

◈ 진부분집합

- 두 집합 A, B에 대하여
  $A \subset B$이고 $A \neq B$일 때,
  집합 A를 집합 B의 진부분집합
  이라한다.

◈ $A=B$

- 집합 A의 모든 원소가 집합 B에
  속하고, 집합 B의 모든 원소가
  집합 A에 속할 때, 두 집합 A, B는
  서로 같다.
- $A \subset B$이고, $B \subset A$이면 $A=B$

#4 부분집합의 개수

원소의 개수가 $n(n \neq 0)$인 집합 A에 대하여

◈ 부분집합의 개수

- 2^n

◈ 진부분집합의 개수

- $2^n - 1$

◈ 특정한 원소 k개를 반드시 포함하는 부분집합의 개수

- 2^{n-k}

◈ 특정한 원소 l개를포함하지 않는 부분집합의 개수

- 2^{n-l}

#5 교집합과 합집합

◈ 교집합

- 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에도 속하는 모든 원소로 이루어진 집합
- $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 이고 } x \in B\}$

◈ 합집합

- 두 집합 A, B에 대하여 A에 속하거나 B에 속하는 모든 원소로 이루어진 집합
- $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$

◈ 서로소

- 두 집합 A, B에서 공통인 원소가 하나도 없을 때, 즉 $A \cap B = \varnothing$일 때, A와 B는 서로소

#6 집합의 연산법칙

◈ 교환법칙

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$
- 교환법칙이 항상 성립하는 건 아니다.
  $A - B \neq B - A$

◈ 결합법칙

- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

◈ 분배법칙

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

◈ 드모르간 법칙

- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

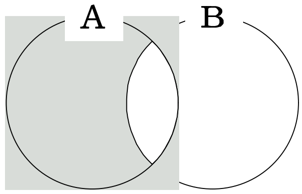
#7 여집합과 차집합

◈ 여집합

- 전체집합 U의 부분집합 A에 대하여 U의 원소 중에서 A에 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합을 U에 대한 A의 여집합이라 한다.
- $A^C = \{x \mid x \in U \text{ 이고 } x \notin A\}$

◈ 차집합

- 두 집합 A, B에 대하여 A에도 속하고 B에는 속하지 않는 모든 원소로 이루어진 집합
- $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 이고 } x \notin B\}$



◈ 차집합과 여집합의 성질

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

- $A - B = A \cap B^c$
- $(A^c)^c = A$
- $U^c = \phi$, $\phi^c = U$
- $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \phi$
- $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

◈ 서로소

- 두 집합 A, B의 교집합이 공집합일 때, 즉 $A \cap B = \phi$일 때, 두 집합 A와 B는 서로소라고 한다.

#8 집합의 원소의 개수

◈ 합집합의 원소의 개수

- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $A \cap B = \varnothing$ 이면 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $n(A \cup B \cup C)$
  $= n(A) + n(B) + n(B)$
  $- n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A)$
  $+ n(A \cap B \cap C)$
- $n(A^C) = n(U) - n(A)$
- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
  $= n(A \cup B) - n(B)$

#9 용어의 정의, 증명, 정리

◈ 용어의 정의

- 용어의 뜻을 명확하게 정한 것

◈ 증명

- 이미 알려진 사실이나 성질을 이용하여 어떤 명제가 참 또는 거짓임을 논리적으로 밝히는 과정

◈ 정리

- 참으로 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 여러 가지 성질을 증명할 때 자주 이용하게 되는 것

#10 명제와 조건

◈ 명제

- 참인지 거짓인지 명확하게 판별할 수 있는 문장이나 식

◈ 조건

- 변수를 포함하는 문장이나 식이 변수 값에 따라 참, 거짓이 결정될 때, 이러한 문장이나 식

◈ 조건 p의 진리집합

- 전체집합 U의 원소 중에서 조건 p를 참이 되게 하는 모든 원소의 집합

◈ 명제의 가정과 결론

- 'p이면 q이다.'와 같은 꼴의 명제에서 p를 가정 q를 결론이라고 하고 $p \to q$와 같이 나타낸다.

#11 명제의 참과 거짓

◈ 명제 $p \to q$의 참

- 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \subset Q$이면 명제 $p \to q$는 참이라 하고 $p \Rightarrow q$와 같이 표현한다.

◈ 명제 $p \to q$의 거짓

- 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \not\subset Q$이면 명제 $p \to q$는 거짓이라 한다.

◈ '모든'이 들어 있는 명제의 참, 거짓

- 전체집합을 U, 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, '모든 x에 대하여 p이다.'는 $P = U$이면 참이고, $P \neq U$이면 거짓

◈ '어떤'이 들어 있는 명제의 참, 거짓

- 전체집합을 U, 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때, '어떤 x에 대하여 p이다.'는 $P \neq \phi$이면 참이고, $P = \phi$이면 거짓

#12 명제와 조건의 부정

◈ 명제 p의 부정
- p가 아니다.
- $\sim p$

◈ 조건 p의 부정
- p가 아니다.
- $\sim p$

◈ 조건 p의 진리집합 P의 부정
- 전체집합 U에 대하여 조건 p의
  진리집합이 P일 때,
  그 부정 $\sim p$의 진리집합은 P^c

◈ "모든"을 포함한 명제의 부정
- 조건 p에 대하여
  명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정
  '어떤 x에 대하여 $\sim p$이다.

◈ "어떤"을 포함한 명제의 부정
- 조건 p에 대하여
  명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정
  '모든 x에 대하여 $\sim p$이다.

#13 명제의 역과 대우

◈ 명제 $p \rightarrow q$의 역
- 가정과 결론을 바꾸는 것
- $q \rightarrow p$

◈ 명제 $p \rightarrow q$의 대우
- $\sim q \rightarrow \sim p$

◈ 명제와 그 대우 사이의 관계
- 명제 $p \rightarrow q$가 참이면
  그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$도 참이다.
- 명제 $\sim q \rightarrow \sim p$가 참이면
  그 대우 $p \rightarrow q$도 참이다.

#14 증명 방법

◈ 대우를 이용한 증명
- 명제 $p \rightarrow q$가 참이면
  그 대우 $\sim q \rightarrow \sim p$도 참이므로
  어떤 명제가 참임을 보이고자할 때,
  그 대우가 참임을 보이는 방법

◈ 귀류법
- 명제를 부정하여 모순을 이끌어 내서
  명제가 참임을 보이는 방법

#15 필요조건과 충분조건

◈ 필요조건

- 명제 $p \to q$가 참일 때,
  $p \Rightarrow q$라 표현하고,
  q는 p이기 위한 필요조건

◈ 충분조건

- 명제 $p \to q$가 참일 때,
  $p \Rightarrow q$라 표현하고,
  p는 q이기 위한 충분조건

◈ 필요충분조건

- 명제 $p \to q$가 참이고,
  명제 $q \to p$도 참일 때,
  $p \Leftrightarrow q$라 표현하고,
  p는 q이기 위한 필요충분조건
  q도 p이기 위한 필요충분조건

#16 절대부등식

◈ 절대부등식의 정의

- 문자를 포함한 부등식 중에서
  문자에 어떤 실수를 대입하여도
  항상 성립하는 부등식

◈ 절대부등식 증명에 사용하는 성질

- 임의의 두 실수 a, b에 대하여
  ① $a > b \Leftrightarrow a-b > 0$
  ② $a>0,\ b>0 \Leftrightarrow a+b>0,\ ab>0$
  ③ $a^2 \geq 0,\ a^2+b^2 \geq 0$
  ④ $a > 0,\ b > 0$일 때,
  $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$
  ⑤ $|a| \geq a$
  ⑥ $a^2+b^2=0 \Leftrightarrow a=0,\ b=0$
  ⑦ $|a|^2=a^2,\ |ab|=|a||b|$

◈ 자주쓰이는 절대부등식

- $x^2+y^2 \geq xy$
  (등호는 $x=y=0$일 때 성립)
- $x>0, y>0$일 때,
  $$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \geq \frac{2ab}{a+b}$$
  (등호는 $x=y$일 때 성립)
- $|x|+|y| \geq |x+y|$
  (등호는 $xy \geq 0$일 때 성립)
- a, b, x, y가 실수일 때,
  $(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geq (ax+by)^2$
  (등호는 $ay=bx$일 때 성립)

#17 대응의 정의

◈ 대응의 정의

- 두 집합 X, Y에 대하여

  집합 X의 원소에 집합 Y의 원소를 짝지어 주는 것을 집합 X에서 집합 Y로의 대응이라 함

  이때 집합 X의 원소 x에 집합 Y의 원소 y가 짝지어지면 x에 y가 대응$(x \to y)$한다고 한다.

#18 함수의 정의

◈ 함수의 정의

- 두 집합 X, Y에 대하여

  집합 X의 모든 원소 각각에 집합 Y의 원소가 오직 하나씩만 대응할 때,

  이 대응을 집합 X에서 집합 Y로의 함수라고 하며

  $f: X \to Y$로 표현한다.

#19 함수의 용어

◈ 함수의 정의역, 공역과 치역

- $f: X \to Y$ 일 때,

  집합 X를 함수 f의 정의역

  집합 Y를 함수 f의 공역이라고 한다.

- $f: X \to Y$ 일 때,

  함수 f에 의하여 정의역 X의 원소 x에 공역 Y의 원소 y가 대응할 때,

  $y = f(x)$로 표현하며

  $f(x)$를 x에서의 함숫값이라 한다.

- $f: X \to Y$ 일 때,

  $\{f(x) \mid x \in X\}$를 함수 f의 치역이라 한다.

◈ 함수가 같다.

- 두 함수 f, g에 대하여

  ㄱ. 정의역과 공역이 각각 서로 같고

  ㄴ. 정의역의 모든 원소 x에 대하여

  $$f(x) = g(x)$$

  를 만족시킬 때, 두 함수 f, g는 서로 같다고 하며, 기호 $f = g$라 표현한다.

#20 함수의 그래프

◈ 함수의 그래프

- 함수 $f: X \to Y$ 에서 정의역 X의 원소 x와 이에 대응하는 함숫값 $f(x)$의 순서쌍 $(x, f(x))$전체의 집합 $G=\{(x, f(x)) \mid x \in X\}$를 함수 f의 그래프라고 한다.

◈ 정의역과 공역이 실수 전체의 집합인 함수 $y=f(x)$의 그래프는 순서쌍 $(x, f(x))$를 좌표평면에 점으로 나타낼 수 있다.

◈ 함수의 그래프의 특징

- 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a에 대하여 y축에 평행한 직선 $x=a$와 오직 한 점에서 만난다.

#21 일대일함수와 일대일 대응

◈ 일대일함수

- 함수 $f: X \to Y$ 에서 정의역 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$가 성립할 때, 함수 f를 일대일함수라 한다.

◈ 일대일 대응

- 함수 $f: X \to Y$ 가 일대일함수이고, 치역과 공역이 같으면 함수 f를 일대일 대응이라한다.

#22 항등함수와 상수함수

◈ 항등함수

- 함수 $f: X \to X$ 에서 정의역 X의 각 원소에 자기 자신이 대응할 때, 즉 $f(x)=x$일 때, 함수 f를 X에서의 항등함수라 한다.

◈ 상수함수

- 함수 $f: X \to Y$ 에서 정의역 X의 모든 원소에 공역 Y의 단 하나의 원소가 대응할 때, 즉 $f(x)=c$(c는 상수) 일 때, 함수 f를 상수함수라 한다.

#23 합성함수

◈ 합성함수의 정의

- 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ 의 합성함수는 $g \circ f: X \to Z$, $(g \circ f)(x)=g(f(x))$

◈ 함수의 합성에 대한 성질

- 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다. 즉, $g \circ f \neq f \circ g$
- 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다. 즉, $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

#24 역함수의 정의와 성질

◈ 역함수의 정의

- 함수 $f: X \to Y$ 가 일대일 대응이면 Y의 각 원소 y에 대하여 $f(x)=y$인 X의 원소 x는 단 하나 존재한다.
  이때, Y의 각 원소 y에 $f(x)=y$인 X의 원소 x를 대응시키면 Y를 정의역으로 하고 X를 공역으로 하는 새로운 함수를 얻을 수 있다.
  이 함수를 f의 역함수라 하며, 기호로 f^{-1}로 나타낸다.
  즉, $f^{-1}: Y \to X,\ x=f^{-1}(y)$

◈ 역함수의 성질

함수 $f: X \to Y$ 가 일대일 대응일 때

- 역함수 $f^{-1}: Y \to X$가 존재
- $y=f(x) \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$
- $\left(f^{-1}\right)^{-1}(x)=f(x)\ (x \in X)$
- $\left(f^{-1} \circ f\right)(x)=x\ (x \in X)$,
  $\left(f^{-1} \circ f\right)(y)=y\ (y \in Y)$

#25 역함수 구하는 방법

◈ 역함수의 표현

- 일반적으로 함수를 나타낼 때, 정의역의 원소를 x, 함숫값을 y로 나타내므로 함수 $y=f(x)$의 역함수 $x=f^{-1}(y)$도 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

◈ 역함수 구하는 방법

- 함수 $y=f(x)$의 역함수가 존재할 때,
  ㄱ. $y=f(x)$를 x에 관하여 푼다.
  ㄴ. $x=f^{-1}(y)$의 x와 y를 서로 바꾼다.
  ㄷ. $y=f^{-1}(x)$

#26 함수와 그 역함수의 그래프

◈ 함수와 그 역함수의 그래프

- 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

#27 다항함수와 유리함수

◈ 다항함수

- 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 다항식일 때,
  이 함수를 다항함수라 한다.

◈ 유리함수

- 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 유리식일 때,
  이 함수를 유리함수라 한다.
  ※ 다항함수도 유리함수의 일종이다.

◈ 유리함수의 정의역

- 일반적으로 다항함수가 아닌 유리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 분모를 0으로 하지 않는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

#28 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$의 그래프

◈ $y=\dfrac{k}{x}(k\neq 0)$의 그래프

- 정의역과 치역은 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
- 원점에 대하여 대칭이다.
- $k>0$이면 그래프는 제 $1, 3$사분면
  $k<0$이면 그래프는 제 $2, 4$사분면에 위치한다.
- 점근선은 x축, y축이다.
- 두 직선 $y=x, y=-x$에 대하여 각각 대칭이다.
- $|k|$의 값이 클수록 그래프는 원점에서 멀어진다.

◈ $y=\dfrac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$의 그래프

- 유리함수 $y=\dfrac{k}{x}$의 그래프는
  x축의 방향으로 p만큼,
  y축의 방향으로 q만큼
  평행이동한 것이다.
- 정의역은 $\{x\,|\,x\neq p\text{인 실수}\}$
  치역은 $\{y\,|\,y\neq q\text{인 실수}\}$이다.
- 점 (p, q)에 대하여 대칭이다.
- 점근선은 $x=p,\ y=q$이다.

◈ $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0,\ c\neq 0)$ 의 그래프

- 다항식의 나눗셈을 이용하여
  $y=\dfrac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$의 꼴로
  변형하여 그릴 수 있다.

#29 무리함수

◈ 무리함수

- 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)$가 x에 대한 무리식일 때,
  이 함수를 무리함수라 한다.

◈ 무리함수의 정의역

- 무리함수에서 정의역이 주어져 있지 않은 경우에는 근호 안의 식의 값이 0이상이 되도록 하는
  실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

#30 무리함수의 그래프

◈ $y=\sqrt{x}$의 그래프

- $y=\sqrt{x}$는 정의역 $\{x|\,x\geq 0\}$에서 치역 $\{y|\,y\geq 0\}$이므로 일대일 대응이므로 역함수가 존재한다.
  $y=\sqrt{x}$의 역함수는 $y=x^2(x\geq 0)$이므로 $y=\sqrt{x}$의 그래프는
  $y=x^2(x\geq 0)$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭인 곡선이다.

◈ $y=\sqrt{ax}$의 그래프

- $a>0$이면 제 1사분면에 있고
  정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$
  치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.
- $a<0$이면 제 2사분면에 있고
  정의역은 $\{x\,|\,x\leq 0\}$
  치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.

◈ $y=-\sqrt{ax}$의 그래프

- $a>0$이면 제 4사분면에 있고
  정의역은 $\{x\,|\,x\geq 0\}$
  치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.
- $a<0$이면 제 3사분면에 있고
  정의역은 $\{x\,|\,x\leq 0\}$
  치역은 $\{y\,|\,y\geq 0\}$이다.

◈ $y=\sqrt{a(x-p)}+q$의 그래프

- $y=\sqrt{ax}$의 그래프를
  x축의 방향으로 p만큼
  y축의 방향으로 q만큼 평행이동하여
  그릴 수 있다.

#31 합의 법칙

◈ 합의 법칙

- 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n이고 두 사건 A, B가 함께 일어나지 않으면, 사건 A또는 사건 B가 일어나는 경우의 수는 $m+n$

#32 곱의 법칙

◈ 곱의 법칙

- 두 사건 A, B가 일어나는 경우의 수가 각각 m, n일 때, 사건 A와 사건 B가 함께 일어나는 경우의 수는 $m\times n$

#33 순열

◈ 순열

- 몇 개의 숫자나 기호 등을 순서를 생각하여 배열한 것
- 서로 다른 n개의 원소를 가지는 집합에서 중복됨이 없이 r개의 원소를 택하여 일렬로 배열한 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고 ${}_nP_r$로 나타낸다.
- ${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\bullet\bullet\bullet(n-r+1)$ $(0<r\le n)$

#34 n계승

◈ n계승

- 1부터 n까지의 자연수를 계속하여 곱한 값
- $n! = n(n-1)(n-2)\bullet\bullet\bullet 3\bullet 2\bullet 1$
- $0!=1$

◈ 순열의 계산

- ${}_nP_0 = 1,\ {}_nP_n = n!$
- ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ $(0\le r\le n)$

#35 조합

◈ 조합

- 서로 다른 n개의 원소 중에서 순서를 생각하지 않고 r개를 택하는 것
- 서로 다른 n개의 원소를 가지는 집합에서 중복됨이 없이 r개의 원소를 택하는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고 ${}_nC_r$로 나타낸다.
- ${}_nC_r = \dfrac{{}_nP_r}{r!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(0\le r\le n)$
- ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ $(0\le r\le n)$
- ${}_{n+1}C_{r+1} = {}_nC_r + {}_nC_{r+1}$ $(1\le r\le n-1)$