#1 함수의 극한

◈ $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한

- 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a와 같지 않으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 ' x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 함숫값 $f(x)$는 L에 수렴한다.'
- $\lim_{x \to a} f(x) = L$ 또는

  $x \to a$일 때 $f(x) \to L$

  이때 L을 $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라 한다.

◈ 함숫값의 발산

- 함수 $f(x)$에서 $x \to a$일 때 $f(x)$의 값이 한없이 커지면 '$x \to a$일 때 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다.'고 하고 $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$와 같이 표현한다.
- 함수 $f(x)$에서 $x \to a$일 때 $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 '$x \to a$일 때 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다.'고 하고 $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$와 같이 표현한다.

#2 함수의 우극한과 좌극한

◈ 우극한

- $x \to a+$일 때 함수 $f(x)$가 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 L을 $x \to a+$일 때의 $f(x)$의 우극한이라 한다.
- $\lim_{x \to a+} f(x) = L$

◈ 좌극한

- $x \to a-$일 때 함수 $f(x)$가 일정한 값 M에 한없이 가까워지면 M을 $x \to a-$일 때의 $f(x)$의 좌극한이라 한다.
- $\lim_{x \to a-} f(x) = M$

◈ 함수의 극한

- $x \to a$일 때 함수 $f(x)$의 극한값이 L이면 $x \to a+$일 때의 $f(x)$의 우극한, $x \to a-$일 때의 $f(x)$의 좌극한이 존재하면서 그 값이 모두 L과 같다.
- $\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$

  $\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$

#3 함수의 극한값의 성질

◈ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a} f(x)=L$, $\lim_{x\to a} g(x)=M$

(L, M은 실수)

- $\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cL$

  (c는 상수)

- $\lim_{x\to a} \{f(x)+g(x)\}$

  $=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L+M$

- $\lim_{x\to a} \{f(x)-g(x)\}$

  $=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L-M$

- $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\lim_{x\to a} g(x)=LM$

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}$

  ($M\neq 0$)

#4 함수의 극한값의 계산

◈ $\frac{0}{0}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모, 분자를 인수분해한 다음 약분한다.
- 무리함수는 먼저 분모, 분자 중 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◈ $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴

- 유리함수는 먼저 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.
- 무리함수는 근호 안의 x의 차수는 반으로 생각하고 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나눈다.

◈ $\infty-\infty$ 꼴

- 다항식은 최고차항으로 묶는다.
- 무리식은 근호를 포함한 쪽을 유리화한다.

◈ $\infty\times 0$ 꼴

- 적당히 변형하면

  $\infty\times c$, $\frac{\infty}{c}$, $\frac{c}{\infty}$, $\frac{c}{0}$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 등의 꼴로 나타낼 수 있다.

※ 미정계수의 결정

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수) 이고

  $\lim_{x\to a} g(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a} f(x)=0$

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 0이 아닌 실수)

  $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 이면 $\lim_{x\to a} g(x)=0$

#5 함수의 극한의 대소 관계

◈ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$가 존재하고

a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

- $f(x)\le g(x)$이면

  $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$

- $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고

  $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$이면

  $\lim_{x\to a}h(x)=L$

#6 함수의 연속

◈ 함수의 연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족하면 '함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속'이라 한다.

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고

  극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하며

  $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

◈ 불연속

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이 아니다.

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 함숫값이 존재하지 않는다.

- 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$가 존재하지 않는다.

- 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$와 함숫값 $f(a)$가

  존재하지만 $\lim_{x\to a}f(x)\ne f(a)$

#7 연속함수

◈ 구간

두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여

- $\{x\,|\,a\le x\le b\}\Rightarrow[a,\ b]$
- $\{x\,|\,a<x<b\}\Rightarrow(a,\ b)$
- $\{x\,|\,a\le x<b\}\Rightarrow[a,\ b)$
- $\{x\,|\,a<x\le b\}\Rightarrow(a,\ b]$
- $\{x\,|\,a\le x\}\Rightarrow[a,\ \infty)$
- $\{x\,|\,a<x\}\Rightarrow(a,\ \infty)$
- $\{x\,|\,x<b\}\Rightarrow(-\infty,\ b)$
- $\{x\,|\,x\le b\}\Rightarrow(-\infty,\ b]$
- 실수 전체의 집합 $\Rightarrow(-\infty,\ \infty)$

◈ 연속함수

- 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 모든 x에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 연속함수라 한다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이라는 것은

  ㄱ. $f(x)$가 열린 구간 $(a,\ b)$에서 연속

  ㄴ. $\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to b-}f(x)=f(b)$

#8 연속함수의 성질

◈ 연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=a$에서 모두 연속이면 다음 함수도 $x=a$에서 연속

- $cf(x)$ (c는 상수)
- $f(x)\pm g(x)$
- $f(x)g(x)$
- $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a)\neq 0)$

◈ 두 다항식 $P(x)$, $Q(x)$로 만들어진 유리함수의 연속

- $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$는 분모를 0으로 하는 x값을 제외한 모든 실수에서 연속

#9 최대 • 최소의 정리

◈ 최대 • 최소의 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

#10 사이값 정리

◈ 사이값 정리

- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 k에 대하여 $f(c)=k$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.
- 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 즉 $f(a)f(b)<0$이면 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 따라서, 방정식 $f(x)=0$의 실근이 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

#11 평균변화율

◈ x의 증분과 y의 증분

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값 y는 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.

- x의 값의 변화량 $b-a$를 x의 증분이라 하고, $\Delta x=b-a$
- y의 값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, $\Delta y=f(b)-f(a)$

◈ 평균변화율

- x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비
- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$

  (단, $\Delta x=b-a$)

#12 미분계수

◈ 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

- 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때, x의 증분 $\Delta x \to 0$일 때 평균변화율의 극한값이 존재하면 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수라고 한다.

- $$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
$$=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

◈ 미분계수의 기하학적 의미

- 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기를 나타낸다.

◈ 미분가능성과 연속성

- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

#13 도함수

◈ 도함수

- 함수 $y=f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x에서 미분가능할 때, 각각의 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키는 것은 함수이고, 이 새로운 함수 $f' : x \to f'(x)$ 를 $f(x)$의 도함수라 한다.

- $f'(x),\ y',\ \dfrac{dy}{dx},\ \dfrac{d}{dx}f(x)$

- $$f'(x)=\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

#14 $f(x)=x^n$의 도함수

◈ $f(x)=x^n$의 도함수

n이 자연수일 때

- 함수 $f(x)=x^n$의 도함수는 $f'(x)=nx^{n-1}$

※ $y=c$ (c는 상수) 이면 $y'=0$

#15 다항함수의 미분법

◈ 다항함수의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능 할 때

- $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (c는 상수)
- $\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$ (부호동순)
- $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

#16 접선의 방정식

◈ 접선의 방정식

$x=a$에서 미분가능한 곡선$y=f(x)$

위의 점 $P(a,\ f(a))$에서의

접선의 방정식

- $y-f(a)=f\,'(a)(x-a)$

#17 접선의 방정식 구하기

◈ 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식

- $y-f(a)=f\,'(a)(x-a)$

◈ 곡선 $y=f(x)$ 밖의 $(a,\ b)$ 에서의 접선의 방정식

- 곡선 위의 한 점 $(t,\ f(t))$ 에서의 접선의 방정식을 구한다.
- $y-f(t)=f\,'(t)(x-t)$
- 위의 식에 $(a,\ b)$를 대입하여 t의 값을 구한다.
- 위의 식에서 구한 t의 값을 $y-f(t)=f\,'(t)(x-t)$에 대입한다.

#18 롤의 정리

◈ 롤의 정리

- 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f\,'(c)=0$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

#19 평균값 정리

◈ 평균값 정리

- 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때, $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f\,'(c)$인 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재한다.

#20 함수의 증가와 감소

◈ 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 $x_1,\ x_2$에 대하여

- $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)<f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가
- $x_1<x_2$일 때 $f(x_1)>f(x_2)$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소

◈ 미분계수를 이용한 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 구간 $(a,\ b)$ 에서 미분가능할 때

- 구간 $(a,\ b)$에서 $f\,'(x)>0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 증가
- 구간 $(a,\ b)$에서 $f\,'(x)<0$이면 함수 $f(x)$는 구간 $[a,\ b]$에서 감소

#21 함수의 극대와 극소

◈ 극대

- 함수 $f(x)$에서 a를 포함하는 어떤 열린 구간을 적절히 택할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$ 이면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다고 하고 $f(a)$를 극댓값이라 한다.

◈ 극소

- 함수 $f(x)$에서 a를 포함하는 어떤 열린 구간을 적절히 택할 때, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$ 이면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 된다고 하고 $f(a)$를 극솟값이라 한다.

◈ 극값

- 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.

◈ 극값의 판정

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극값을 가지고 a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능하면 $f'(a)=0$ 이다.

- a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f(x)$에 대하여$f'(a)=0$이고 x의 값이 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 바뀔 때, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
- a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f(x)$에 대하여$f'(a)=0$이고 x의 값이 a보다 작은 값에서 a보다 큰 값으로 바뀔 때, $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

#22 함수의 그래프와 그 응용

◈ 함수의 그래프

- 함수 $y=f(x)$의 정의역과 치역, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 연속성 등은 함수의 특징이라 할 수 있고, 이러한 특징을 알면 그 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

◈ 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값

- 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 이 구간에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 갖는다.

  ※ 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 그 구간에서의 극댓값과 극솟값 및 양 끝 값 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택한다.

◈ 함수의 그래프와 방정식

- 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표와 같다.
- 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이다.

◈ 함수의 그래프와 부등식

- 주어진 범위에서 부등식 $f(x) \ge g(x)$를 증명하는 것은 $F(x)=f(x)-g(x)$ 로 놓고 $F(x) \ge 0$을 증명하는 것과 같다.

#23 속도와 가속도

◈ 속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치를 점 P의 좌표 x로 나타내면 x는 t의 함수이다.

이 함수를 $x=f(t)$라 하면

- 시각 t에서 $t+\Delta t$까지의 점 P의 평균 속도

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

- 시각 t에서 x의 순간변화율

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(\Delta t+t)-f(t)}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$ 를

시각 t에서의 점 P의 속도라 한다.

※ 속도의 절댓값 $|v(t)|$를 시각 t 에서의 점 P의 속력이라 한다.

◈ 가속도

- 시각 t에서 속도 $v(t)$ 함수의 순간변화율

$$a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(\Delta t+t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$ 를

시각 t에서의 점 P의 가속도라 한다.

#24 부정적분

◈ 부정적분

- 미분하여 $f(x)$가 되는 함수, 즉

  $F'(x)=f(x)$

  가 되는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라 한다.

- $f(x)=F'(x)\Leftrightarrow\int f(x)dx=F(x)+C$

  (C는 적분상수)

#25 부정적분의 계산

◈ x^n의 부정적분

n이 음이 아닌 정수일 때,

- $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

  (C는 적분상수)

◈ 부정적분의 성질

- $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (k는 상수)
- $\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$
- $\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

#26 정적분

◈ 구분구적법

- 도형을 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 이들 도형의 넓이나 부피의 합을 구한 후, 이 합의 극한값으로 원래 도형의 넓이나 부피를 구하는 방법을 구분구적법이라 한다.

◈ 정적분의 정의

- 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

$$\left(\Delta x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + k\Delta x\right)$$

#27 미적분의 기본 정리

◈ 정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

- $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)\ \ (a < x < b)$

◈ 미적분의 기본 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 함수 $F(x)$가 $f(x)$의 한 부정적분일 때,

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

#28 정적분의 성질

◈ 정적분의 성질 (1)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

- $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k는 상수)
- $\displaystyle\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

◈ 정적분의 성질 (2)

함수 $f(x)$가 세 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속일 때,

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

#29 도형의 넓이

◈ 곡선과 x축 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

- $S=\int_a^b |f(x)|dx$

◈ 두 곡선 사이의 넓이

- 구간 $[a, b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면
- $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

◈ 곡선과 y축 사이의 넓이

구간 $[c, d]$에서 연속인 함수 $x=g(y)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

- $S=\int_c^d |g(y)|dy$

#30 속도와 거리

◈ 직선 위를 움직이는 점의 위치

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, $t=a$일 때의 점 P의 위치를 $f(a)$라고 하면 $t=b$일 때의 점 P의 위치 $f(b)$는

- $f(b)=f(a)+\int_a^b v(t)dt$

◈ 직선 위를 움직이는 점의 이동 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 이동거리를 L이라 하면

- $L=\int_a^b |v(t)|dt$